

Maxime PELLETIER

Mémoire de MA2

Comportement quasi-polynomial de  
la dimension du sous-espace de  
poids zéro d'une représentation  
irréductible d'un groupe algébrique  
simple

Encadré par M. Nicolas RESSAYRE

*Master 2 Mathématiques Avancées 2013-2014*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Descente de fibrés en droites à des GIT-quotients</b>	<b>3</b>
1.1 Rappel sur les GIT-quotients . . . . .	3
1.2 Notations nécessaires dans cette partie . . . . .	4
1.3 Existence de points semi-stables . . . . .	6
1.4 Des lemmes préliminaires au résultat principal . . . . .	8
1.5 Le théorème principal de cette section et sa démonstration . . . . .	14
1.6 Application du théorème précédent selon le type de $G$ . . . . .	18
<b>2 Comportement quasi-polynomial par morceaux pour la dimension des espaces de poids zéro</b>	<b>24</b>
2.1 Définition du cadre de cette section . . . . .	24
2.2 Partie préliminaire au résultat principal (critère de Hilbert-Mumford et utilisations) . . . . .	26
2.3 Le théorème principal . . . . .	31
2.4 Exemples d'obtention des polynômes $f_{\bar{\mu},k}$ . . . . .	34
2.4.1 Cas de groupes de type $A_2$ et $B_2$ . . . . .	34
2.4.2 Cas du groupe $GL_4(\mathbb{C})$ . . . . .	37

## Introduction

Ce mémoire a été réalisé lors d'un stage à l'Institut Camille Jordan, d'avril à juillet 2014, et encadré par Nicolas Ressayre. Je le remercie d'ailleurs beaucoup pour toute son aide et toutes ses explications. Il s'agit du deuxième mémoire que j'écris sous son encadrement (après un mémoire de master Mathématiques Générales l'an dernier), et j'apprécie bien de travailler avec lui.

Le but de ce mémoire était de comprendre des travaux de Shrawan Kumar (de l'Université de Caroline du Nord) concernant la dimension de l'espace de poids zéro dans une représentation irréductible d'un groupe algébrique semi-simple. Il s'agit d'un cas particulier du problème appelé "Problème de branchement". Celui-ci consiste en la situation suivante : étant donnés deux groupes réductifs complexes  $\tilde{G} \subset G$  et une représentation irréductible  $V(\lambda)$  de  $G$ , de plus haut poids  $\lambda$ , on décompose cette dernière en somme directe de représentations irréductibles de  $\tilde{G}$  :

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\tilde{\lambda}} c(\tilde{\lambda}, \lambda) V(\tilde{\lambda}),$$

où, pour tout  $\tilde{\lambda}$ ,  $c(\tilde{\lambda}, \lambda)$  est la multiplicité de  $V(\tilde{\lambda})$  dans cette décomposition. On cherche alors à étudier ces multiplicités. Le cas particulier traité par Kumar, auquel on va s'intéresser, est celui où  $\tilde{G}$  est un tore maximal de  $G$ . Il obtient, dans un article [KP14] de 2014 intitulé "Dimension of zero weight space : an algebro-geometric approach" et écrit en collaboration avec Dipendra Prasad (de l'Institut de Recherche Fondamentale Tata, en Inde), le résultat suivant : la dimension du sous-espace de poids zéro (i.e. formés des points fixés par le tore maximal) de la représentation  $V(\lambda)$  de plus haut poids  $\lambda$  est une fonction (de  $\lambda$ ) quasi-polynomiale par morceaux. Il annonce également qu'on peut prouver, de la même manière, un comportement similaire pour la dimension de n'importe quel sous-espace de poids, et même pour la dimension de tout sous-espace  $H$ -invariant, pour tout sous-groupe réductif  $H$ .

Avant de pouvoir se pencher sur cet article de Kumar et Prasad, il a fallu étudier en détail un premier article de Shrawan Kumar : "Descent of line bundles to GIT-quotients of flag varieties by maximal torus" [Kum08], paru en 2008. Il y démontre un résultat primordial pour obtenir celui mentionné précédemment. De plus, encore préalablement à ceci, j'ai dû me familiariser avec la notion de fibré en droites, puis comprendre toute la construction du GIT-quotient d'une variété projective par un groupe réductif. J'ai étudié pour ceci plusieurs chapitres du livre d'Igor Dolgachev : "Lectures on Invariant Theory" [Dol03], que je résume de manière extrêmement concise au début de la première partie.

# 1 Descente de fibrés en droites à des GIT-quotients

On considère dans cette section un groupe algébrique complexe semi-simple  $G$  qui est connexe et simplement connexe. Comme c'est habituellement le cas, on va prendre dans  $G$  un tore maximal  $T$ , et  $P$  un sous-groupe parabolique contenant  $T$ . On a alors la variété de drapeaux  $Y = G/P$ . On va considérer un fibré en droites sur  $Y$  et notre objectif va être d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que ce fibré "descende" à un certain GIT-quotient de  $Y$  par  $T$  (on précisera ce que signifient ces notions). On se base pour cela sur un article de Shrawan Kumar [Kum08].

## 1.1 Rappel sur les GIT-quotients

Mais commençons tout d'abord par un très rapide rappel sur les GIT-quotients (la référence utilisée pour ceci est le livre de Dolgachev [Dol03]). Si on considère une variété projective  $X$  sur laquelle agit un groupe réductif  $G$ , le but est de construire un bon quotient catégorique de  $X$  par  $G$ . Mais cela ne va pas être possible de quotienter de cette manière  $X$  en entier. On prend donc un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample et  $G$ -linéarisé sur  $X$  (i.e. muni d'une action de  $G$  linéaire sur les fibres, telle que la projection sur  $X$  associée à  $\mathcal{L}$  est  $G$ -équivariante) et on définit différents sous-ensembles de  $X$  :

**Définition 1.1.** (i) Soit  $x \in X$ . Le point  $x$  est dit :

- *semi-stable (par rapport à  $\mathcal{L}$ )* s'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})^G$  (i.e.  $s$  est une section  $G$ -invariante du fibré en droites  $\mathcal{L}^{\otimes m}$ ) telle que  $s(x) \neq 0$ .
- *stable (par rapport à  $\mathcal{L}$ )* s'il existe  $m$  et  $s$  comme dans le cas précédent et si, de plus, le stabilisateur  $G_x$  de  $x$  est fini et l'orbite  $G.x$  de  $x$  est fermée dans l'ensemble des points semi-stables.
- *instable (par rapport à  $\mathcal{L}$ )* s'il n'est pas semi-stable.

(ii) On note respectivement  $X^{ss}(\mathcal{L})$ ,  $X^s(\mathcal{L})$ , et  $X^{us}(\mathcal{L})$  l'ensemble des points semi-stables, stables, et instables.

Remarquons immédiatement que  $X^{ss}(\mathcal{L})$  et  $X^s(\mathcal{L})$  sont des ouverts de Zariski. On peut alors montrer :

**Proposition 1.1.** Il existe un bon quotient catégorique de  $X^{ss}(\mathcal{L})$  par  $G$  :

$$\pi : X^{ss}(\mathcal{L}) \longrightarrow X^{ss}(\mathcal{L}) // G.$$

De plus, la restriction du quotient  $\pi$  à  $X^s(\mathcal{L})$  est un bon quotient géométrique, et  $X^{ss}(\mathcal{L}) // G$  est une variété projective.

**Remarque :** Rappelons que la différence entre bon quotient catégorique et bon quotient géométrique est simplement que, pour un bon quotient catégorique, toute fibre contient une seule orbite fermée alors que, pour un bon quotient géométrique, toute fibre est une orbite.

Pour construire ce quotient  $X^{ss}(\mathcal{L}) // G$ , il s'agit de recouvrir  $X^{ss}(\mathcal{L})$  par un nombre fini d'ensembles  $X_{s_i} = \{y \in X / s_i(y) \neq 0\}$ , qui sont des ouverts affines. On sait alors construire sans problème un bon quotient catégorique sur chacun des  $X_{s_i}$ , et il faut ensuite recoller ces quotients en utilisant ce que l'on appelle les données de recollement. Pour la démonstration complète, voir [Dol03].

## 1.2 Notations nécessaires dans cette partie

Comme indiqué précédemment, on considère  $G$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{C}$  semi-simple, connexe, et simplement connexe. Soient  $T$  un tore maximal de  $G$ ,  $B$  un sous-groupe de Borel contenant  $T$ , et  $P$  un sous-groupe parabolique contenant  $B$ . On note  $B^-$  le sous-groupe de Borel opposé de  $G$  (i.e. le sous-groupe de Borel tel que  $B \cap B^- = T$ , ou encore le sous-groupe de Borel dont les racines sont les opposées de celles de  $B$ ), et  $U, U^-$  les radicaux unipotents respectifs de  $B, B^-$ .

On notera l'algèbre de Lie de tout groupe algébrique considéré par la lettre gothique associée : par exemple  $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}$ . Soient  $\Delta$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{g}$  par rapport à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{t}$ , et  $\Delta^+$  son sous-ensemble formé des racines de  $\mathfrak{b}$ , appelées racines positives. Dans ce dernier ensemble, on prend encore des racines particulières : les racines simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ , dont l'ensemble noté  $\Pi$  forme une base du système de racines  $\Delta$ .

On note également, pour toute racine  $\alpha \in \Delta$ ,  $\mathfrak{g}_\alpha$  l'espace radiciel associé à  $\alpha$ . Soit  $W$  le groupe de Weyl de  $G$  et notons, pour tout  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $s_i \in W$  la réflexion simple correspondant à la racine simple  $\alpha_i$ , ainsi que  $\alpha_i^\vee$  la coracine correspondant à  $\alpha_i$ . C'est le moment d'introduire les différents réseaux qui vont être utilisés :

$$Q = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{t}^*$$

est le réseau des racines,

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* / \forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}\}$$

est le réseau des poids, et

$$Q^\vee = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \mathfrak{t}$$

celui des coracines. On note

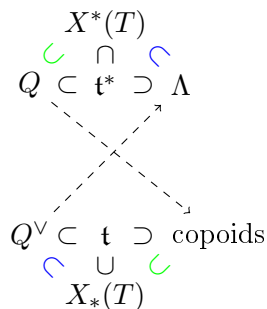
$$\Lambda^+ = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* / \forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}\}$$

l'ensemble des poids entiers dominants (sous-ensemble de  $\Lambda$ ).

Soit  $X^*(T)$  le groupe des caractères de  $T$ . En prenant la dérivée d'un caractère en l'élément neutre, qui va de  $T$  dans  $\mathbb{C}^*$ , on obtient une application linéaire de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathbb{C}$ , i.e.

un élément de  $\mathfrak{t}^*$ . Ceci nous permet d'injecter  $X^*(T)$  dans  $\mathfrak{t}^*$ , car deux caractères ayant la même dérivée en l'élément neutre sont égaux. Mais, ici, on a même plus précisément  $X^*(T) \simeq \Lambda$  car  $G$  est simplement connexe. Pour  $\lambda \in \Lambda$ , on notera  $e^\lambda \in X^*(T)$  le caractère correspondant (ceci pour des raisons pratiques : dans  $\Lambda$ , la loi est l'addition, alors que la loi de groupe de  $X^*(T)$  est la multiplication). Ce caractère  $e^\lambda$  se prolonge de manière unique en un caractère de  $B$ .

**Remarque :** Le diagramme suivant peut être intéressant afin de se rappeler quels sont les différents ensembles considérés et leur disposition les uns par rapport aux autres :



où les copoids sont définis à partir des racines de la même manière dont les poids sont définis à partir des coracines (c'est le sens des deux flèches pointillées). Nul besoin de les définir vraiment, puisque nous ne les utiliserons pas. Dans le cas d'un groupe simplement connexe, les inclusions en bleu sont des égalités et, s'il s'agit d'un groupe adjoint, ce sont les inclusions en vert qui sont des égalités (par définitions). De plus, quand on note  $X^*(T) \subset \mathfrak{t}^*$ , c'est un abus : cela provient de l'identification expliquée précédemment. De même pour  $X_*(T) \subset \mathfrak{t}$ , cela provient d'une identification que l'on obtient en dérivant les sous-groupes à un paramètre de  $T$  (qui sont les éléments de  $X_*(T)$ ). On reviendra précisément à cette dernière identification bien plus tard.

Faisons une dernière remarque sur l'importance de ces ensembles : il existe un théorème de classification qui dit qu'un groupe semi-simple est caractérisé par la donnée de son système de racines et de  $X^*(T)$ .

Revenons aux dernières notations que nous avons à définir. Pour tout poids dominant  $\lambda \in \Lambda^+$ , on note  $V(\lambda)$  la représentation irréductible (unique à isomorphisme près) de  $\mathfrak{g}$  de plus haut poids  $\lambda$ . Définissons ensuite des objets qui dépendent du sous-groupe parabolique  $P$  choisi :

$$\begin{aligned}
 \Pi_P &= \{\alpha_i \in \Pi / -\alpha_i \text{ est une racine de } \mathfrak{p}\}, \\
 \Lambda_P &= \{\lambda \in \Lambda / \forall \alpha_i \in \Pi_P, \lambda(\alpha_i^\vee) = 0\}, \\
 \Lambda_P^+ &= \Lambda_P \cap \Lambda^+,
 \end{aligned}$$

et

$$\Lambda_P^\circ = \{\lambda \in \Lambda_P / \forall \alpha_i \in \Pi \setminus \Pi_P, \lambda(\alpha_i^\vee) > 0\}.$$

En particulier, on remarque que, si on a  $P = B$ , alors on a  $\Pi_B = \emptyset$  et donc simplement  $\Lambda_B = \Lambda$  et  $\Lambda_B^+ = \Lambda^+$ . De plus, pour  $\lambda \in \Lambda$ ,  $e^\lambda$  se prolonge en un caractère de  $P$  si et seulement si  $\lambda \in \Lambda_P$ .

On en arrive aux dernières définitions et notations de cette partie, qui vont concerner le fibré en droites considéré sur  $Y$ . Soit  $\lambda \in \Lambda_P$ . On note  $\mathbb{C}_{-\lambda}$  la représentation complexe de dimension 1 de  $P$  donnée par le caractère  $e^{-\lambda}$ . Le sous-groupe  $P$  agit alors sur le produit  $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$  par, pour tous  $p \in P$  et  $(g, v) \in G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$ ,

$$p.(g, v) = (gp^{-1}, e^{-\lambda}(p)v).$$

Cela nous donne une relation d'équivalence sur  $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$  : deux couples  $(g, v)$  et  $(g', v')$  sont équivalents s'ils sont dans la même orbite pour cette action de  $P$ . On a alors un quotient de  $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$  par cette relation d'équivalence, que l'on note  $G \times_P \mathbb{C}_{-\lambda}$ . La classe d'un élément  $(g, v) \in G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$  est notée  $[g, v]$ .

On pose ainsi  $\mathcal{L}_P(\lambda) = G \times_P \mathbb{C}_{-\lambda}$ , qui est un fibré en droites  $T$ -linéarisé sur la variété de drapeau  $Y = G/P$ . En effet, la projection associée à ce fibré en droites est

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathcal{L}_P(\lambda) & \longrightarrow & Y \\ [g, v] & \longmapsto & gP \end{array} .$$

Le tore  $T$  agit bien sûr sur  $Y$  par multiplication à gauche et sur  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  par la formule

$$\forall t \in T, \forall [g, v] \in \mathcal{L}_P(\lambda), \quad t.[g, v] = [tg, v]$$

(on vérifie sans problème que c'est une action bien définie et linéaire sur les fibres). De plus, on a bien, avec ces actions ainsi définies, pour tout  $t \in T$  et tout  $[g, v] \in \mathcal{L}_P(\lambda)$ ,

$$\pi(t.[g, v]) = \pi([tg, v]) = tgP = t.\pi([g, v]).$$

Enfin, un dernier résultat que l'on donne : le fibré en droites  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  est ample si et seulement si  $\lambda \in \Lambda_P^\circ$ .

### 1.3 Existence de points semi-stables

Comme notre but va être de considérer un GIT-quotient de  $Y$  par  $T$ , il va nous falloir regarder un ensemble de points semi-stables. On prend donc  $\lambda \in \Lambda_P^\circ$  et on a ainsi un fibré en droites sur  $Y$  ample et  $T$ -linéarisé :  $\mathcal{L}_P(\lambda)$ . Cela nous donne un ensemble de points semi-stables par rapport à ce fibré en droites, que l'on note  $Y^{ss}(\lambda)$ . La première chose que l'on va vouloir montrer est que  $Y^{ss}(\lambda)$  est non vide. Pour cela, on commence par rappeler un résultat bien connu :

**Lemme 1.2.** *Soient  $\mu \in \Lambda^+$  et  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \Delta^+$  tel que l'indice du sous-réseau  $\mathbb{Z}\beta = \mathbb{Z}\beta_1 + \dots + \mathbb{Z}\beta_n$  dans le réseau  $Q$  est fini. On note  $\mathfrak{g}(\beta)$  la sous-algèbre de Lie semi-simple de  $\mathfrak{g}$  dont les racines sont les racines de  $\mathfrak{g}$  éléments du réseau  $\mathbb{Z}\beta$  (on a en*

particulier,  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}(\beta)$ ). On prend également  $v_\mu^+$  un vecteur non nul de plus haut poids de  $V(\mu)$ .

Alors, l'espace de poids 0 du sous-module  $U(\mathfrak{g}(\beta)).v_\mu^+$  de  $V(\mu)$  est non réduit à zéro si et seulement si  $\mu \in \mathbb{Z}\beta$ .

Ce résultat, appliqué dans notre cas à  $\beta = \Pi$  et  $\mu = n\lambda$ , nous donne que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V(n\lambda)^T \neq \{0\}$  si et seulement si  $n\lambda \in Q$  (car  $V(n\lambda)^T$  est l'espace de poids 0, puisque le poids 0 correspond (par la correspondance donnée dans la partie précédente) au caractère trivial (i.e. constant et valant 1) de  $T$ . Nous avons alors un deuxième lemme à utiliser :

**Lemme 1.3.** *Soit  $g \in G$ . Alors,  $gP \in Y^{ss}(\lambda)$  si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $v_{n\lambda}^+$  un vecteur non nul de plus haut poids de  $V(n\lambda)$  tel que  $g.v_{n\lambda}^+$  a une composante non nulle selon l'espace de poids 0.*

*Démonstration.* Par définition,  $gP$  est un point semi-stable si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et une section  $s \in H^0(Y, \mathcal{L}_P(n\lambda))^T$  telle que  $s(gP) \neq 0$ . Cela provient simplement du fait que  $\mathcal{L}_P(\lambda)^{\otimes n} \simeq \mathcal{L}_P(n\lambda)$  (puisque les caractères  $(e^{-\lambda})^n$  et  $e^{-n\lambda}$  sont les mêmes, d'où l'intérêt de cette notation).

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $v_{n\lambda}^+$  un vecteur non nul de plus haut poids de  $V(n\lambda)$ . Considérons alors l'isomorphisme  $G$ -équivariant suivant :

$$\begin{aligned} \chi : V(n\lambda)^* &\longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}_P(n\lambda)) \\ f &\longmapsto \left( gP \mapsto \left[ g, (g^{-1}.f)|_{\mathbb{C}v_{n\lambda}^+} \right] \right) \end{aligned}$$

(en identifiant  $\mathbb{C}v_{n\lambda}^+$  à  $\mathbb{C}$  en envoyant  $v_{n\lambda}^+$  sur 1). Voir que  $\chi$  est  $G$ -équivariant n'est pas difficile : pour tous  $g_0, g \in G$  et  $f \in V(n\lambda)^*$ ,

$$\begin{aligned} (g_0.\chi(f))(gP) &= g_0.(\chi(f)(g_0^{-1}gP)) \\ &= g_0. \left[ g_0^{-1}g, (g^{-1}g_0.f)|_{\mathbb{C}v_{n\lambda}^+} \right] \\ &= \left[ g, (g^{-1}g_0.f)|_{\mathbb{C}v_{n\lambda}^+} \right] \\ &= \chi(g_0.f)(gP). \end{aligned}$$

Par contre, voir qu'il y a isomorphisme entre  $V(n\lambda)^*$  et  $H^0(Y, \mathcal{L}_P(n\lambda))$  est bien plus compliqué : il faut d'abord voir que

$$H^0(Y, \mathcal{L}_P(n\lambda)) \simeq \{f \in \mathbb{C}[G] / \forall g \in G, \forall p \in P, f(gp) = e^{n\lambda}(p)f(g)\},$$

puis utiliser le théorème de Frobenius et le fait que, pour un poids  $\mu$ ,

$$(V(\mu))_{n\lambda} \simeq \begin{cases} \{0\} & \text{si } \mu \neq n\lambda \\ \mathbb{C} & \text{si } \mu = n\lambda \end{cases}.$$

En utilisant l'isomorphisme  $\chi$ , on a donc :

$$\begin{aligned} gP \in Y^{ss}(\lambda) &\iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists f \in (V(n\lambda)^*)^T / \chi(f)(gP) \neq 0 \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists f \in (V(n\lambda)^*)^T / (g^{-1}.f)|_{\mathbb{C}v_{n\lambda}^+} \neq 0 \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists f \in (V(n\lambda)^*)^T / f(g.v_{n\lambda}^+) \neq 0. \end{aligned}$$



Pour conclure, décomposons  $V(n\lambda)$  en somme directe du sous-espace de poids 0 et d'un sous-espace  $T$ -stable  $S$  ne contenant aucun point  $T$ -fixe non nul :

$$V(n\lambda) = V(n\lambda)^T \oplus S.$$

Le vecteur  $g.v_{n\lambda}^+$  se décompose en  $v^T + s$  selon cette somme directe. Puisque

$$V(n\lambda)^* \simeq (V(n\lambda)^T)^* \oplus S^* \simeq (V(n\lambda)^*)^T \oplus S^*,$$

avec  $S^*$  sous-espace  $T$ -stable ne contenant aucun point  $T$ -fixe non nul, on a  $v^T \neq 0$  si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in (V(n\lambda)^*)^T$  tel que  $f(g.v_{n\lambda}^+) \neq 0$ .

Finalement, on obtient ainsi que  $gP \in Y^{ss}(\lambda)$  si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $v_{n\lambda}^+$  un vecteur non nul de plus haut poids de  $V(n\lambda)$  tel que  $g.v_{n\lambda}^+$  a une composante non nulle selon l'espace de poids 0.  $\square$

On peut grâce à cela obtenir que  $Y^{ss}(\lambda) \neq \emptyset$  (en particulier,  $Y^{ss}(\lambda)$  est donc dense dans  $Y$ , puisqu'il s'agit d'un ouvert de Zariski). En effet, on a  $\lambda \in \Lambda$  donc, comme  $Q$  est d'indice fini dans  $\Lambda$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n\lambda \in Q$ , i.e.  $V(n\lambda)^T \neq \{0\}$  (d'après ce qui précède le deuxième lemme). Ainsi, si on prend  $v_{n\lambda}^+$  un vecteur non nul de plus haut poids dans  $V(n\lambda)$ , comme celui-ci engendre la représentation,  $V(n\lambda)$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g.v_{n\lambda}^+$  a une composante non nulle dans  $V(n\lambda)^T$ , i.e.  $gP \in Y^{ss}(\lambda)$ , par le lemme ci-dessus.

**Remarque :** Remarquons que les deux lemmes précédents sont également vrais dans le cas où le groupe  $G$  est juste réductif (et pas nécessairement semi-simple et simplement connexe). C'est plus général que le cadre de cette section 1, mais cela nous sera utile dans la section 2.

#### 1.4 Des lemmes préliminaires au résultat principal

Nous allons tout d'abord donner (et démontrer) cinq lemmes qui nous seront utiles dans la démonstration du résultat principal de cette partie. Pour commencer, intéressons-nous aux sous-groupes d'isotropie pour l'action de  $T$  sur  $Y$  par multiplication à gauche. On a, pour  $t \in T$  et  $g \in G$ ,

$$tgP = gP \iff tg \in gP \iff t \in gPg^{-1}.$$

Ainsi, pour tout  $g \in G$ , le sous-groupe d'isotropie de  $gP$  est :

$$I_{gP} = T \cap gPg^{-1}.$$

**Lemme 1.4.** *Pour tous  $g \in G$  et  $\mu \in \Lambda_P$ , le sous-groupe d'isotropie  $I_{gP}$  agit trivialement sur la fibre  $\mathcal{L}_P(\mu)|_{gP}$  si et seulement si  $e^\mu|_{P \cap g^{-1}Tg}$  est constant et vaut 1.*

*Démonstration.* Soient  $g \in G$  et  $\mu \in \Lambda_P$ . Remarquons tout d'abord que le sous-groupe d'isotropie agit bien sur la fibre de  $gP$  puisque :

$$\forall t \in T, \forall x \in \mathcal{L}_P(\mu)|_{gP}, \quad t.x \in \mathcal{L}_P(\mu)|_{tgP},$$

car  $\mathcal{L}_P(\mu)$  est  $T$ -linéarisé. Donc, pour le sous-groupe d'isotropie  $I_{gP}$ ,  $t.x$  reste dans la fibre de  $gP$ .

Ensuite, pour tous  $t \in I_{gP}$  et  $v \in \mathbb{C}_{-\mu} \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} t.[g, v] &= [tg, v] \\ &= [gg^{-1}tg, v] \\ &= [g, e^{-\mu}(g^{-1}tg)v] \quad \text{car } g^{-1}tg \in P \text{ et par définition de } G \times_P \mathbb{C}_{-\mu}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $t \in I_{gP}$  agit trivialement sur  $\mathcal{L}_P(\mu)|_{gP}$  si et seulement  $e^{-\mu}(g^{-1}tg) = 1$ . Or,  $\{g^{-1}tg ; t \in I_{gP}\} = P \cap g^{-1}Tg$ . D'où le résultat.  $\square$

Donnons quelques nouvelles notations avant le lemme suivant :  $N(T)$  est le normalisateur de  $T$  dans  $G$ . On définit également le sous-groupe parabolique opposé de  $P$ , noté  $P^-$ , par son algèbre de Lie qui est :

$$\mathfrak{p}^- = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{p})} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

où  $\Delta(\mathfrak{p})$  désigne l'ensemble des racines de  $\mathfrak{p}$ . On note enfin  $U_P^-$  le radical unipotent de  $P^-$ .

**Lemme 1.5.** Soient  $w \in N(T)$ ,  $u \in U_P^-$  et  $p \in P$ . On pose  $g = wup$ . Alors,

$$p^{-1}(T \cap u^{-1}Tu)p = P \cap g^{-1}Tg.$$

De plus si, dans ce qui précède, on suppose seulement  $u \in U^-$ , alors une inclusion reste vraie :

$$p^{-1}(T \cap u^{-1}Tu)p \subset P \cap g^{-1}Tg.$$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord la première assertion : on a, par définition de  $g$ ,

$$P \cap g^{-1}Tg = P \cap p^{-1}u^{-1}w^{-1}Twp,$$

i.e.

$$P \cap g^{-1}Tg = p^{-1}(P \cap u^{-1}Tu)p,$$

car  $w \in N(T)$ . De plus, si  $u^{-1}tu \in P$ , alors  $u^{-1}tut^{-1} \in P \cap U_P^- = \{1\}$ , d'où  $u^{-1}tu = t$ . Ainsi,  $P \cap u^{-1}Tu \subset T$  et donc  $p^{-1}(P \cap u^{-1}Tu)p \subset p^{-1}Tp$ . D'où

$$P \cap g^{-1}Tg \subset p^{-1}Tp \cap g^{-1}Tg.$$

Réciproquement,  $p^{-1}Tp \subset P$  et donc  $p^{-1}Tp \cap g^{-1}Tg \subset P \cap g^{-1}Tg$ . Donc

$$P \cap g^{-1}Tg = p^{-1}Tp \cap g^{-1}Tg.$$

Or, on a déjà vu que  $g^{-1}Tg = p^{-1}(u^{-1}Tu)p$ . D'où

$$P \cap g^{-1}Tg = p^{-1}(T \cap u^{-1}Tu)p.$$

Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de repartir de

$$P \cap g^{-1}Tg = p^{-1}(P \cap u^{-1}Tu)p,$$

car  $p^{-1}(T \cap u^{-1}Tu)p \subset p^{-1}(P \cap u^{-1}Tu)p$ .  $\square$

Comme dans la partie précédente, on prend  $\lambda \in \Lambda_P^\circ$ . On a justement vu dans cette partie-là que  $Y^{ss}(\lambda) \neq \emptyset$ .

**Lemme 1.6.** *Soit  $gP \in Y^{ss}(\lambda)$ . Alors, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que*

$$e^{n\lambda} \Big|_{P \cap g^{-1}Tg} \equiv 1.$$

*En particulier, si on désigne par  $(P \cap g^{-1}Tg)^\circ$  la composante neutre de  $P \cap g^{-1}Tg$ ,*

$$e^\lambda \Big|_{(P \cap g^{-1}Tg)^\circ} \equiv 1.$$

*Démonstration.* Introduisons une nouvelle notation : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $v \in V(n\lambda)$ , on note  $[v]_0$  la composante de  $v$  selon l'espace de poids zéro dans  $V(n\lambda)$ .

Alors, par le lemme 1.3, puisque  $gP$  est semi-stable, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $v_{n\lambda}^+ \in V(n\lambda) \setminus \{0\}$  un vecteur de plus haut poids tel que  $[g.v_{n\lambda}^+]_0 \neq 0$ . Or, pour tout  $t \in T$ ,

$$[(tg).v_{n\lambda}^+]_0 = [g.v_{n\lambda}^+]_0$$

(puisque "de poids 0" signifie "fixé par  $T$ "). De plus, pour  $t \in T \cap gPg^{-1}$ ,

$$[g.v_{n\lambda}^+]_0 = [(tg).v_{n\lambda}^+]_0 = [(gg^{-1}tg).v_{n\lambda}^+]_0 = e^{n\lambda}(g^{-1}tg)[g.v_{n\lambda}^+]_0,$$

d'où  $e^{n\lambda}(g^{-1}tg) = 1$ . Ainsi, pour tout  $p \in P \cap g^{-1}Tg$ ,  $e^{n\lambda}(p) = 1$ .

Pour démontrer la deuxième assertion (après le "en particulier"), il suffit d'utiliser ce que l'on vient de montrer, le fait qu'un tore connexe  $S$  est un groupe divisible (i.e. que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $s \in S$ , il existe  $t \in S$  tel que  $t^n = s$ ), et que  $e^\lambda$  est un caractère.  $\square$

**Lemme 1.7.** *Soit  $x \in \mathfrak{u}^-$ . On note  $\beta_x \subset \Delta^+$  l'ensemble des racines positives dont les opposées apparaissent lors de la décomposition de  $x$  selon la somme directe des espaces radiciels. Plus explicitement,*

$$x = \sum_{\alpha \in \beta_x} x_{-\alpha}$$

*avec, pour tout  $\alpha \in \beta_x$ ,  $x_{-\alpha} \neq 0$ . Alors, en posant  $u = \text{Exp } x$ ,*

$$T \cap u^{-1}Tu = \bigcap_{\alpha \in \beta_x} \{t \in T / e^\alpha(t) = 1\}.$$

*En particulier, pour tout poids  $\mu \in \Lambda$ ,  $e^\mu|_{T \cap u^{-1}Tu} \equiv 1$  si et seulement si  $\mu \in \mathbb{Z}\beta_x$ .*

*Démonstration.* Soit  $t \in T \cap u^{-1}Tu$ , i.e.  $utu^{-1} \in T$ . Alors,  $utu^{-1}t^{-1} \in T \cap U^-$  car  $T$  normalise  $U^-$ . De plus,  $T \cap U^- = \{1\}$ , donc  $utu^{-1} = t$ , i.e.  $tut^{-1} = u$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Exp } x &= u \\ &= tut^{-1} \\ &= t \text{Exp}(x)t^{-1} \\ &= \text{Exp}(\text{Ad}(t)(x)) \\ &= \text{Exp} \left( \sum_{\alpha \in \beta_x} e^{-\alpha}(t)x_{-\alpha} \right), \end{aligned}$$

car  $\text{Ad}(t)$  est un élément de  $\mathfrak{t}$  qui opère sur les espaces radiciels  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  par multiplication par  $-\alpha(\text{Ad}(t)) = e^{-\alpha}(t)$  (d'après la correspondance déjà évoquée entre poids - une racine est en particulier un poids - et caractères). En outre,  $\text{Exp}|_{\mathfrak{u}^-}$  est une bijection, et donc

$$\sum_{\alpha \in \beta_x} e^{-\alpha}(t)x_{-\alpha} = \sum_{\alpha \in \beta_x} x_{-\alpha}.$$

Ainsi, puisque la somme des espaces radiciels est directe, on a, pour tout  $\alpha \in \beta_x$ ,  $e^{-\alpha}(t) = 1$ . D'où

$$T \cap u^{-1}Tu \subset \bigcap_{\alpha \in \beta_x} \{t \in T / e^{\alpha}(t) = 1\}.$$

Réciproquement, si on prend un élément  $t$  du membre de droite, on a à nouveau

$$\sum_{\alpha \in \beta_x} e^{-\alpha}(t)x_{-\alpha} = \sum_{\alpha \in \beta_x} x_{-\alpha}.$$

D'où, par les mêmes calculs que précédemment,  $tut^{-1} = u$ , i.e.  $utu^{-1} = t$ , et donc  $t \in u^{-1}Tu$ . On obtient ainsi l'inclusion réciproque.

Il reste à prouver l'assertion suivant "En particulier". Pour cela, on pose

$$\begin{aligned} \xi : T &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}^*) \\ t &\longmapsto (\mu \mapsto e^{\mu}(t)) \end{aligned}.$$

Vérifions rapidement que cela définit un isomorphisme :

- L'application  $\xi$  est clairement un homomorphisme de groupes.
- Soit  $t \in T$  tel que, pour tout  $\mu \in \Lambda$ ,  $e^{\mu}(t) = 1$ , i.e.  $\chi(t) = 1$  pour tout  $\chi \in X^*(T)$ . Alors,  $t = 1$ . D'où l'injectivité de  $\xi$ .
- Soit  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}^*)$ . Comme  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}^*) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(T), \mathbb{C}^*) = X^{\widehat{}}(T)$ , il existe  $t \in T$  tel que, pour tout  $\mu \in \Lambda$ ,  $\varphi(\mu) = e^{\mu}(t)$ . D'où la surjectivité de  $\xi$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \xi(T \cap u^{-1}Tu) &= \{\xi(t) ; t \in \bigcap_{\alpha \in \beta_x} \{t \in T / e^{\alpha}(t) = 1\}\} \\ &= \{\mu \mapsto e^{\mu}(t) ; t \in T / \forall \alpha \in \beta_x, e^{\alpha}(t) = 1\} \\ &= \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}^*) / \forall \alpha \in \beta_x, \varphi(\alpha) = 1\} \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda / \mathbb{Z}\beta_x, \mathbb{C}^*) \end{aligned}$$

par passage au quotient. De plus, si  $\mu \in \Lambda \setminus (\mathbb{Z}\beta_x)$ , alors  $\mu + \mathbb{Z}\beta_x \neq 0 + \mathbb{Z}\beta_x$  et donc il existe  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x, \mathbb{C}^*)$  tel que  $f(\mu + \mathbb{Z}\beta_x) \neq 1$ . Ainsi, si  $\mu \in \Lambda \setminus (\mathbb{Z}\beta_x)$ , alors, par l'isomorphisme juste au-dessus, il existe  $t \in T \cap u^{-1}Tu$  tel que  $e^\mu(t) \neq 1$ , i.e.  $e^\mu|_{T \cap u^{-1}Tu} \neq 1$ . Par contraposée de ceci, on obtient l'implication directe de l'assertion après "En particulier".

Montrons maintenant l'implication réciproque : soit  $\mu \in \mathbb{Z}\beta_x$ . On a montré que, pour tout  $t \in T \cap u^{-1}Tu$ , pour tout  $\alpha \in \beta_x$ ,  $e^\alpha(t) = 1$ . Donc, pour tout  $t \in T \cap u^{-1}Tu$ , par produits (et passages à l'inverse),  $e^\mu(t) = 1$ . D'où l'implication réciproque.  $\square$

Introduisons à nouveau deux notations supplémentaires : pour tout  $\mathbb{Z}$ -module (ou groupe abélien, c'est la même chose)  $M$ , on note  $\text{Tor } M$  le sous-groupe de torsion de  $M$  (i.e.  $\text{Tor } M = \{x \in M / \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } nx = 0\}$ ), et  $M^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$ .

**Lemme 1.8.** *Soit  $S \subset \Delta^+$ . On note  $T_S = \bigcap_{\alpha \in S} \{t \in T / e^\alpha(t) = 1\}$ , et  $T_S^\circ$  la composante neutre de  $T_S$ . Alors,*

$$T_S/T_S^\circ \simeq \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}S)^\vee.$$

*Démonstration.* On va de nouveau utiliser l'isomorphisme  $\xi$  vu dans la démonstration précédente :

$$\xi : \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \Lambda^\vee \\ t & \longmapsto & (\mu \mapsto e^\mu(t)) \end{array} .$$

Alors,

$$\begin{aligned} \xi(T_S) &= \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}^*) / \forall \alpha \in S, \varphi(\alpha) = 1\} \\ &= \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}^*) / \forall \alpha \in \mathbb{Z}S, \varphi(\alpha) = 1\} \\ &\simeq (\Lambda/\mathbb{Z}S)^\vee. \end{aligned}$$

De plus, décomposons  $\Lambda/\mathbb{Z}S$ , grâce au théorème de structure des groupes abéliens de type fini, en :

$$\Lambda/\mathbb{Z}S \simeq \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}S) \oplus L,$$

où  $L$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre. On a alors

$$(\Lambda/\mathbb{Z}S)^\vee \simeq \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}S)^\vee \times L^\vee.$$

De plus, si on note  $m$  le rang du  $\mathbb{Z}$ -module libre  $L$ , on a  $L^\vee \simeq (\mathbb{C}^*)^m$ . Ainsi,  $T_S^\circ \simeq L^\vee$ , et donc

$$T_S/T_S^\circ \simeq \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}S)^\vee.$$

$\square$

Donnons enfin un dernier lemme :

**Lemme 1.9.** *Soient  $H$  un groupe réductif agissant sur une variété projective  $X$ , et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample  $H$ -linéarisé sur  $X$ . On note  $X^{ss}(\mathcal{L}) // H$  le GIT-quotient de  $X^{ss}(\mathcal{L})$  par  $H$ . Alors, un fibré vectoriel  $\mathcal{S}$   $H$ -linéarisé sur  $X$  descend en un fibré vectoriel sur  $X^{ss}(\mathcal{L}) // H$  si et seulement si, pour tout  $x \in X^{ss}(\mathcal{L})$ , le sous-groupe d'isotropie  $I_x$  associé agit trivialement sur la fibre  $\mathcal{S}_x$ .*

*Démonstration.* On peut la trouver par exemple dans un article de J.-M. Drezet et M. S. Narasimhan [DN89]. L'implication directe n'est pas difficile ; le sens réciproque l'est beaucoup plus.  $\square$

C'est sans doute une bonne idée, à ce moment-là, de préciser ce que signifie qu'un fibré vectoriel descend en un fibré vectoriel sur un GIT-quotient.

**Définition 1.2.** *Reprenons les notations du lemme tout juste énoncé. On dit qu'un fibré vectoriel  $\mathcal{S}$   $H$ -linéarisé sur  $X$  descend en un fibré vectoriel sur  $X^{ss}(\mathcal{L}) // H$  s'il existe un fibré vectoriel  $H$ -linéarisé sur  $X^{ss}(\mathcal{L}) // H$  (voir à ce propos la remarque ci-dessous) dont le tiré en arrière à  $X^{ss}(\mathcal{L})$  (pour la projection canonique de  $X^{ss}(\mathcal{L})$  sur  $X^{ss}(\mathcal{L}) // H$ ) est isomorphe de manière  $H$ -équivariante à la restriction de  $\mathcal{S}$  à  $X^{ss}(\mathcal{L})$ .*

Cette définition sera sans doute bien plus claire avec le schéma que voici :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & & \mathcal{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \text{---} \\ X \supset X^{ss}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\pi} & X^{ss}(\mathcal{L}) // H \end{array}$$

avec  $\pi^*(\mathcal{S}') \simeq \mathcal{S}|_{X^{ss}(\mathcal{L})}$  de manière  $H$ -équivariante.

Remarquons que, puisqu'il s'agit d'un (bon) quotient catégorique, le groupe  $H$  agit trivialement sur le quotient  $X^{ss}(\mathcal{L}) // H$ . Par conséquent, une  $H$ -linéarisation d'un fibré en droites -disons  $\mathcal{M}$ - sur  $X^{ss}(\mathcal{L}) // H$  est donnée par un caractère  $\chi$  de  $H$  :

$$\forall h \in H, \forall m \in \mathcal{M}, h.m = \chi(h)m.$$

Terminons cette section avec une remarque importante.

**Remarque :** Puisque  $Y^{ss}(\lambda)$  est non vide (on l'a montré dans la partie 1.3) et Zariski-ouvert dans  $Y$ , on peut trouver, par densité, un point semi-stable dans  $Y$  de la forme  $\text{Exp}(x)P$ , avec  $x \in \mathfrak{u}^-$  tel que  $\beta_x = \Delta^+$ .

Plus généralement, soit  $\beta \subset \Delta^+$  tel que le sous-réseau  $\mathbb{Z}\beta$  est d'indice fini dans  $Q$ . Alors, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n\lambda \in \mathbb{Z}\beta$ . D'où, d'après le lemme 1.2, pour un vecteur  $v_{n\lambda}^+ \neq 0$  de plus haut poids de  $V(n\lambda)$ ,

$$(U(\mathfrak{g}(\beta)).v_{n\lambda}^+)^T \neq \{0\},$$

i.e.

$$((U(\mathfrak{g}(\beta)).v_{n\lambda}^+)^*)^T \neq \{0\}.$$

Or, si on note  $G(\beta)$  le sous-groupe connexe semi-simple de  $G$  dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{g}(\beta)$  et  $P(\beta) = P \cap G(\beta)$ , qui est un sous-groupe parabolique de  $G(\beta)$ , on a  $((U(\mathfrak{g}(\beta)).v_{n\lambda}^+)^*)^T$

qui est (isomorphe à) l'espace des sections  $T$ -invariantes du fibré en droites  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  restreint à  $G(\beta)/P(\beta)$ . Le fait que cet espace de sections soit non trivial implique que  $(G(\beta)/P(\beta))^{ss}(\lambda)$  est non vide. Enfin,  $(G(\beta)/P(\beta))^{ss}(\lambda) = (G(\beta)/P(\beta)) \cap Y^{ss}(\lambda)$  (l'inclusion réciproque est immédiate ; pas l'inclusion directe, mais nous n'avons pas la place de tout détailler). Ainsi,

$$(G(\beta)/P(\beta)) \cap Y^{ss}(\lambda) \neq \emptyset.$$

Par conséquent, de nouveau par Zariski-densité, on peut trouver un élément semi-stable de  $Y$  de la forme  $\text{Exp}(x)P$ , avec  $x \in \mathfrak{u}^-$  tel que  $\beta_x$  est l'ensemble des racines positives de  $G(\beta)$  (i.e. les racines de  $B \cap G(\beta)$ ).

## 1.5 Le théorème principal de cette section et sa démonstration

Comme dans les parties précédentes, on prend  $\lambda \in \Lambda_P^\circ$  afin d'avoir  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  qui est un fibré en droites ample  $G$ -linéarisé sur  $Y$ . On note  $Y(\lambda) // T$  le GIT-quotient de  $Y^{ss}(\lambda)$  par  $T$ .

**Théorème 1.1.** *Le fibré en droites  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  descend en un fibré en droites sur  $Y(\lambda) // T$  si et seulement si, pour toute sous-algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$  (de telles sous-algèbres sont nécessairement de même rang que  $\mathfrak{g}$ ),*

$$\lambda \in \mathbb{Z}\Delta^+(\mathfrak{s}),$$

où  $\Delta^+(\mathfrak{s}) = \Delta^+ \cap \Delta(\mathfrak{s})$  est l'ensemble des racines positives de  $\mathfrak{s}$ .

*Démonstration.* Par le lemme 1.9 :

$$\mathcal{L}_P(\lambda) \text{ descend à } Y(\lambda) // T \iff \forall gP \in Y^{ss}(\lambda), I_{gP} \text{ agit trivialement sur } \mathcal{L}_P(\lambda)_{gP}.$$

Donc, d'après le lemme 1.4,

$$\mathcal{L}_P(\lambda) \text{ descend à } Y(\lambda) // T \iff \forall gP \in Y^{ss}(\lambda), e^\lambda \Big|_{P \cap g^{-1}Tg} \equiv 1.$$

De plus, on remarque que

$$\bigcup_{w \in N(T)} wU_P^-P$$

est un ouvert (réunion d'ouverts)  $T$ -stable (il suffit de l'écrire) de  $G/P$  dont le complémentaire ne contient aucun point fixe par  $T$  (ils sont tous dans cet ouvert). Si ce complémentaire n'était pas vide cela contredirait le théorème du point fixe de Borel. Donc

$$G/P = \bigcup_{w \in N(T)} wU_P^-P.$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}_P(\lambda) \text{ descend à } Y(\lambda) // T \iff \forall w \in N(T), \forall u \in U_P^- \text{ tels que } wuP \in Y^{ss}(\lambda), e^\lambda \Big|_{P \cap (wu)^{-1}Twu} \equiv 1.$$

Donc, par le lemme 1.5,

$$\mathcal{L}_P(\lambda) \text{ descend à } Y(\lambda) // T \iff \forall w \in N(T), \forall u \in U_P^- \text{ tels que } wuP \in Y^{ss}(\lambda), \\ e^\lambda \Big|_{T \cap u^{-1}Tu} \equiv 1.$$

Utilisons à présent le lemme 1.7 :

$$\mathcal{L}_P(\lambda) \text{ descend à } Y(\lambda) // T \iff \forall w \in N(T), \forall u \in U_P^- \text{ tels que } wuP \in Y^{ss}(\lambda), \\ \lambda \in \mathbb{Z}\beta_x, \text{ avec } x \in \mathfrak{u}^- \text{ tel que } \text{Exp } x = u.$$

On va à présent montrer par double implication l'équivalence annoncée dans l'énoncé. On commence par l'implication directe.

On suppose que  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  descend à  $Y(\lambda) // T$ , i.e. (d'après ce que l'on vient d'obtenir) pour tous  $w \in N(T)$  et  $u \in U_P^-$  tels que  $wuP \in Y^{ss}(\lambda)$ , en prenant  $x \in \mathfrak{u}^-$  tel que  $\text{Exp } x = u$ , on a  $\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x$ .

Soit alors  $\mathfrak{s}$  une sous-algèbre de Lie semi-simple de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$ . On a vu, dans la remarque complètement à la fin de la partie 1.4, qu'il existe  $x \in \mathfrak{u}^-$  tel que  $\text{Exp}(x)P \in Y^{ss}(\lambda)$  et  $\beta_x = \Delta^+(\mathfrak{s})$ . Ainsi,  $\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x = \mathbb{Z}\Delta^+(\mathfrak{s})$  (propriété ci-dessus appliquée à  $w = 1$  et  $u = \text{Exp } x$ ).

Réciproquement, on suppose que, pour toute sous-algèbre de Lie semi-simple de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}\Delta^+(\mathfrak{s})$ .

Soit  $w \in N(T)$  et  $x \in \mathfrak{u}^-$  tels que  $w\text{Exp}(x)P \in Y^{ss}(\lambda)$ . Si  $\mathbb{Z}\beta_x$  est un sous-réseau d'indice fini dans  $Q$ , alors  $\beta_x$  est l'ensemble des racines positives d'une sous-algèbre de Lie semi-simple de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$ . D'où, par hypothèse,  $\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x$ , ce qui termine l'étude de ce cas.

Supposons donc que  $\mathbb{Z}\beta_x$  n'est pas d'indice fini dans  $Q$ . On prend alors un ensemble de racines simples  $\alpha_x = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}\} \subset \Delta^+$  tel que

$$\mathbb{Q}\beta_x \cap \mathbb{Q}\alpha_x = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}\beta_x + \mathbb{Q}\alpha_x = \mathbb{Q}\Delta^+$$

(en notant, de manière fort peu surprenante, pour tout sous-ensemble  $\Theta \subset \Delta^+$ ,  $\mathbb{Q}\Theta = \sum_{\theta \in \Theta} \mathbb{Q}\theta$ ), i.e. le sous- $Q$ -espace vectoriel  $\mathbb{Q}\alpha_x$  est un supplémentaire de  $\mathbb{Q}\beta_x$  dans le  $Q$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{Q}\Delta^+ = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Q}\alpha_i$ . **Montrons qu'alors :**<sup>1</sup>

$$\text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x) \hookrightarrow \text{Tor}(\Lambda/(\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x)).$$

Pour cela, **commençons par voir que l'on a la suite exacte**

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\alpha_x \xrightarrow{\varphi} \Lambda/\mathbb{Z}\beta_x \xrightarrow{\psi} \Lambda/(\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x) \longrightarrow 0,$$

avec

$$\varphi : \lambda \longmapsto \lambda + \mathbb{Z}\beta_x \quad \text{et} \quad \psi : \lambda + \mathbb{Z}\beta_x \longmapsto \lambda + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x).$$

---

1. Les phrases notées en gras nous permettront -espérons- de rendre plus claire la structure de cette partie-là de la démonstration, en mettant en évidence les étapes importantes.



En effet,  $\varphi$  est injective car  $\mathbb{Q}\beta_x \cap \mathbb{Q}\alpha_x = \{0\}$ ,  $\psi$  est bien définie car

$$\begin{aligned} \lambda + \mathbb{Z}\beta_x = \lambda' + \mathbb{Z}\beta_x &\Rightarrow \exists \in \mathbb{Z}\beta_x / \lambda = \lambda' + v \\ &\Rightarrow \lambda + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x) = \lambda' + v + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x) = \lambda' + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x), \end{aligned}$$

et clairement surjective. De plus, si  $\lambda + \mathbb{Z}\beta_x \in \text{Im } \varphi$ , i.e. si  $\lambda \in \mathbb{Z}\alpha_x$ , alors

$$\psi(\lambda + \mathbb{Z}\beta_x) = \lambda + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x) = 0 + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x),$$

et donc  $\lambda + \mathbb{Z}\beta_x \in \text{Ker } \psi$ . Réciproquement, soit  $\lambda + \mathbb{Z}\beta_x \in \text{Ker } \psi$ , i.e.  $\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x$ . Alors,  $\lambda$  s'écrit de manière unique (car  $\mathbb{Q}\beta_x \cap \mathbb{Q}\alpha_x = \{0\}$ )  $v_\beta + v_\alpha$  avec  $v_\beta \in \mathbb{Z}\beta_x$  et  $v_\alpha \in \mathbb{Z}\alpha_x$ . Par conséquent,  $\lambda + \mathbb{Z}\beta_x = v_\alpha + \mathbb{Z}\beta_x = \varphi(v_\alpha) \in \text{Im } \varphi$ . D'où  $\text{Im } \varphi = \text{Ker } \psi$ .

**On a ainsi bien la suite exacte annoncée**, qui nous donne un isomorphisme

$$\phi : (\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x)/\mathbb{Z}\alpha_x \longrightarrow \Lambda/(\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x).$$

On note de plus  $\pi$  la projection canonique  $\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x \longrightarrow (\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x)/\mathbb{Z}\alpha_x$ . Alors,

$$\phi \circ \pi : \Lambda/\mathbb{Z}\beta_x \longrightarrow \Lambda/(\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x),$$

et on regarde  $\phi \circ \pi|_{\text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x)}$ . Soit  $\lambda + \mathbb{Z}\beta_x \in \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x)$ , i.e. il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x$ . Alors,

$$n\phi \circ \pi(\lambda + \mathbb{Z}\beta_x) = n\lambda + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x) = 0 + (\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x).$$

D'où  $\phi \circ \pi(\lambda + \mathbb{Z}\beta_x) \in \text{Tor}(\Lambda/(\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x))$ . **On a ainsi, par restriction de  $\phi \circ \pi$ , un homomorphisme**

$$f : \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x) \longrightarrow \text{Tor}(\Lambda/(\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x)).$$

Voyons alors que  $f$  est injective : soit  $\lambda + \mathbb{Z}\beta_x \in \text{Ker } f$ , i.e.  $\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x$ . Le poids  $\lambda$  s'écrit alors de manière unique  $v_\beta + v_\alpha$ , avec  $v_\beta \in \mathbb{Z}\beta_x$  et  $v_\alpha \in \mathbb{Z}\alpha_x$ . De plus, comme  $\lambda + \mathbb{Z}\beta_x \in \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x)$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x$ . Donc

$$nv_\beta + nv_\alpha = n\lambda \in \mathbb{Z}\beta_x$$

et donc  $nv_\alpha = 0$  (toujours car  $\mathbb{Q}\beta_x \cap \mathbb{Q}\alpha_x = \{0\}$ ), i.e.  $v_\alpha = 0$ . D'où

$$\lambda + \mathbb{Z}\beta_x = v_\beta + \mathbb{Z}\beta_x = 0 + \mathbb{Z}\beta_x,$$

d'où  $\text{Ker } f = \{0 + \mathbb{Z}\beta_x\}$ . **Ainsi,  $f$  est injective et nous donne ce que l'on voulait :**

$$\text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x) \hookrightarrow \text{Tor}(\Lambda/(\mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x)).$$

Soit alors  $\mathfrak{s}$  une sous-algèbre de Lie semi-simple de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$  telle que

$$\mathbb{Z}\Delta^+(\mathfrak{s}) = \mathbb{Z}\beta_x + \mathbb{Z}\alpha_x.$$

On prend  $y \in \mathfrak{u}^-$  tel que  $\beta_y = \Delta^+(\mathfrak{s})$  et  $\text{Exp}(y)P \in Y^{ss}(\lambda)$  (une nouvelle fois grâce à la remarque de la fin de la partie 1.4), et on note  $u = \text{Exp } x$  et  $v = \text{Exp } y$ . On a, en utilisant le lemme 1.7,

$$T \cap v^{-1}Tv = \bigcap_{\alpha \in \beta_y} \{t \in T / e^\alpha(t) = 1\} \subset \bigcap_{\alpha \in \beta_x} \{t \in T / e^\alpha(t) = 1\} = T \cap u^{-1}Tu$$

(car  $\beta_x \subset \beta_y$ ). **Montrons que cela nous permet d'obtenir :**

$$(T \cap v^{-1}Tv)/(T \cap v^{-1}Tv)^\circ \twoheadrightarrow (T \cap u^{-1}Tu)/(T \cap u^{-1}Tu)^\circ.$$

Tout d'abord, grâce aux lemmes 1.7 et 1.8,

$$\begin{aligned} (T \cap v^{-1}Tv)/(T \cap v^{-1}Tv)^\circ &= \bigcap_{\alpha \in \beta_y} \{t \in T / e^\alpha(t) = 1\} / \left( \bigcap_{\alpha \in \beta_y} \{t \in T / e^\alpha(t) = 1\} \right)^\circ \\ &\simeq \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_y)^\vee. \end{aligned}$$

De même,

$$(T \cap u^{-1}Tu)/(T \cap u^{-1}Tu)^\circ \simeq \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x)^\vee.$$

Or, on rappelle que l'on a montré que

$$\text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x) \hookrightarrow \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_y).$$

D'où, en passant aux duals (le dual d'un  $\mathbb{Z}$ -module  $M$  est ici  $M^\vee$ ),

$$\text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_y)^\vee \twoheadrightarrow \text{Tor}(\Lambda/\mathbb{Z}\beta_x)^\vee,$$

i.e. **ce que l'on voulait :**

$$(T \cap v^{-1}Tv)/(T \cap v^{-1}Tv)^\circ \twoheadrightarrow (T \cap u^{-1}Tu)/(T \cap u^{-1}Tu)^\circ.$$

À présent, comme  $wuP$  est (par hypothèse) semi-stable, on a, par le lemme 1.6,

$$e^\lambda \Big|_{(P \cap (wu)^{-1}Twu)^\circ} \equiv 1,$$

i.e. (d'après le lemme 1.5)

$$e^\lambda \Big|_{(T \cap u^{-1}Tu)^\circ} \equiv 1.$$

De plus, d'après ce que l'on a supposé,  $\lambda \in \mathbb{Z}\Delta^+(\mathfrak{s}) = \mathbb{Z}\beta_y$ , et donc (par le lemme 1.7)

$$e^\lambda \Big|_{T \cap v^{-1}Tv} \equiv 1.$$

Finalement, on a montré que :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^\lambda \Big|_{T \cap v^{-1}Tv} \equiv 1 \\ e^\lambda \Big|_{(T \cap u^{-1}Tu)^\circ} \equiv 1 \\ (T \cap v^{-1}Tv)/(T \cap v^{-1}Tv)^\circ \twoheadrightarrow (T \cap u^{-1}Tu)/(T \cap u^{-1}Tu)^\circ \end{array} \right. .$$

Donc

$$e^\lambda \Big|_{T \cap u^{-1}Tu} \equiv 1.$$

Ainsi, par les conditions nécessaires et suffisantes obtenues au tout début de cette démonstration,  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  descend à  $Y(\lambda) // T$ .  $\square$

## 1.6 Application du théorème précédent selon le type de $G$

On va à présent utiliser le théorème 1.1 afin d'obtenir explicitement les  $\lambda \in \Lambda_P^\circ$  pour lesquels le fibré en droites  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  descend au GIT-quotient  $Y(\lambda) // T$ .

**Théorème 1.2.** *Soit  $G$  un groupe algébrique simple connexe et simplement connexe contenant un sous-groupe parabolique  $P$ . Soit  $\lambda \in \Lambda_P^\circ$ . Alors, le fibré en droites ample  $T$ -linéarisé  $\mathcal{L}_P(\lambda)$  sur la variété de drapeau  $Y = G/P$  descend en un fibré en droites sur le GIT-quotient  $Y(\lambda) // T$  si et seulement si  $\lambda$  est de la forme suivante, selon le type de  $G$  :*

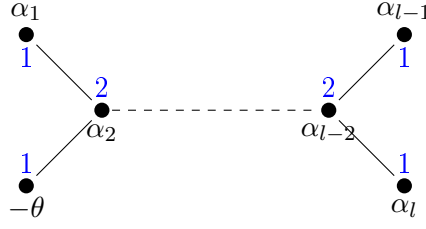
1.  $G$  de type  $A_l$  ( $l \geq 1$ ) :  $\lambda \in Q$ .
2.  $G$  de type  $B_l$  ( $l \geq 3$ ) :  $\lambda \in 2Q$ .
3.  $G$  de type  $C_l$  ( $l \geq 2$ ) :  $\lambda \in \mathbb{Z}2\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}2\alpha_{l-1} + \mathbb{Z}\alpha_l = 2\Lambda$ .
4.  $G$  de type  $D_4$  :  $\lambda \in \{n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4 ; n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}, n_1 + n_3 + n_4 \in 2\mathbb{Z}\}$ .
5.  $G$  de type  $D_l$  ( $l \geq 5$ ) :  $\lambda \in \{2n_1\alpha_1 + \cdots + 2n_{l-2}\alpha_{l-2} + n_{l-1}\alpha_{l-1} + n_l\alpha_l ; n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}, n_{l-1} + n_l \in 2\mathbb{Z}\}$ .
6.  $G$  de type  $G_2$  :  $\lambda \in \mathbb{Z}6\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2$ .
7.  $G$  de type  $F_4$  :  $\lambda \in \mathbb{Z}6\alpha_1 + \mathbb{Z}6\alpha_2 + \mathbb{Z}12\alpha_3 + \mathbb{Z}12\alpha_4$ .
8.  $G$  de type  $E_6$  :  $\lambda \in 6\Lambda$ .
9.  $G$  de type  $E_7$  :  $\lambda \in 12\Lambda$ .
10.  $G$  de type  $E_8$  :  $\lambda \in 60Q$ .

*Démonstration.* Comme on l'a dit, on va partir du résultat donné par le théorème 1.5. Mais cela nécessite de pouvoir déterminer les sous-algèbres semi-simples de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$ . Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème de Borel-Siebenthal [Wol84], qui énonce qu'on peut obtenir les diagrammes de Dynkin des sous-algèbres semi-simples de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{t}$  en enlevant du diagramme de Dynkin étendu de  $\mathfrak{g}$  un sommet dont le coefficient est 1 ou un nombre premier. De plus, la sous-algèbre associée à un tel diagramme est unique à conjugaison par  $W$  près. On notera  $\theta$  la plus haute racine de  $\mathfrak{g}$ .

On ne va pas détailler tous les cas : beaucoup d'entre eux se ressemblent (au moins dans la méthode à suivre ; seuls les calculs changent). Le cas  $A_l$  est immédiat, puisqu'il n'existe dans ce cas aucune sous-algèbre de Lie comme on cherche qui soit non triviale. Le cas  $G_2$  est également particulièrement simple, puisque, en utilisant le théorème de Borel-Siebenthal sur le diagramme de Dynkin étendu pour  $G_2$ , on obtient simplement un diagramme de Dynkin de type  $A_2$  et un autre de type  $A_1 \times A_1$ . On va donc s'intéresser principalement aux cas  $B_l$  et  $F_4$ , qui sont plutôt intéressants et représentatifs de ce qu'il se passe. Le cas  $B_l$  nécessitant la connaissance préalable du cas  $D_l$ , nous allons commencer par ce dernier.

Cas  $D_l$  ( $l \geq 4$ ) :

Rappelons dans ce cas l'allure du diagramme de Dynkin étendu :



On a écrit à côté de chaque sommet en noir la racine désignée par ce sommet, et en bleu le coefficient associé au sommet dans ce diagramme de Dynkin étendu. Rappelons que ces coefficients sont obtenus en considérant l'expression de la plus haute racine en fonction des racines simples : le coefficient associé au sommet " $\alpha_i$ " est le coefficient devant  $\alpha_i$  dans cette expression (ici,  $\theta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$ ), et le coefficient associé au sommet " $-\theta$ " est toujours 1. Commençons par traiter à part le cas de  $D_4$ , les résultats obtenus différant légèrement. Introduisons deux notations pratiques :

$$L(\mathbf{X}_k; \beta_1, \dots, \beta_k)$$

désigne l'intersection des  $\mathbb{Z}\Delta^+(\mathfrak{s})$ , où  $\mathfrak{s}$  parcourt l'ensemble des sous-algèbres de Lie semi-simples (contenant  $\mathfrak{k}$ ) d'une algèbre de Lie de type  $\mathbf{X}_k$  dont les racines simples sont  $\beta_1, \dots, \beta_k$ . Autre notation : si  $M$  est un sous-réseau de  $Q$ ,

$$[M]_W = \bigcap_{w \in W} wM.$$

Dans le cas de  $D_4$ , on a :

$$\begin{aligned} L(D_4; \alpha_1, \dots, \alpha_4) &= [L(A_1; \alpha_1) + L(A_1; \alpha_3) + L(A_1; \alpha_4) + L(A_1; -\theta)]_W \\ &\quad (\text{car, si on enlève un autre sommet que celui correspondant à } \\ &\quad \alpha_2, \text{ on ré-obtient } D_4) \\ &= [\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4 + \mathbb{Z}\theta]_W \\ &= [\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4 + \mathbb{Z}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)]_W \\ &= [\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4]_W. \end{aligned}$$

Remarquons alors que le réseau  $\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$  n'est pas  $W$ -stable. En effet, en utilisant la matrice de Cartan du système de racines  $D_4$ , que l'on rappelle ci-dessous, on peut calculer l'image par la réflexion simple  $s_2$  d'un élément  $n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4 \in \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$  :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$s_2(n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4) = n_1\alpha_1 + (n_1 - 2n_2 + n_3 + n_4)\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4.$$

Ainsi, comme  $n_1 - 2n_2 + n_3 + n_4$  n'est pas nécessairement pair, on a  $s_2(\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4) \not\subset \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$ . Considérons donc le sous-réseau suivant de ce dernier :

$$L' = \{n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4; n_1, \dots, n_4 \in \mathbb{Z} / n_1 + 2n_2 + n_3 + n_4 \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Ce sous-réseau  $L'$  est d'indice 2 dans  $\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$  et  $W$ -stable. Pour voir ce dernier point, il suffit de regarder comme précédemment l'image d'un élément de  $L'$  par les réflexions simples  $s_1, \dots, s_4$ . On ne va pas tout écrire, mais par exemple pour  $s_2$ , en réutilisant le calcul précédent, on voit que, si  $n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4 \in L'$ , alors  $n_1 - 2n_2 + n_3 + n_4$  est pair (car  $n_1 + n_3 + n_4$  l'est), tout comme la somme  $n_1 + (n_1 - 2n_2 + n_3 + n_4) + n_3 + n_4 = 2n_1 - 2n_2 + 2n_3 + 2n_4$ . Ainsi,  $[\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4]_W$  est un sous-réseau strict de  $\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$  qui contient le sous-réseau  $L'$  (d'indice 2). Donc :

$$L(\mathbf{D}_4; \alpha_1, \dots, \alpha_4) = L'.$$

Passons au cas de  $\mathbf{D}_l$  ( $l \geq 5$ ) :

$$L(\mathbf{D}_l; \alpha_1, \dots, \alpha_l) = \left[ \bigcap_{i=2}^{l-2} (L(\mathbf{D}_i; -\theta, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) + L(\mathbf{D}_{l-i}; \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_l)) \right]_W$$

(car, si on enlève un des sommets correspondant à  $\theta, \alpha_1, \alpha_{l-1}$ , ou  $\alpha_l$ , on retombe sur  $\mathbf{D}_l$  en entier), en considérant ici que  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{D}_3 = \mathbf{A}_3$ . On raisonne donc par récurrence en supposant que, si  $4 \leq k < l$ ,  $L(\mathbf{D}_k; \dots)$  est de la forme donnée dans l'énoncé du théorème. Alors (car on connaît les cas  $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ ),

$$\begin{aligned} L(\mathbf{D}_l; \alpha_1, \dots, \alpha_l) = & [(\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}\alpha_1 + L'(\alpha_3, \dots, \alpha_l)) \\ & \cap (\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2 + L'(\alpha_4 + \dots + \alpha_l)) \\ & \cap \bigcap_{i=4}^{l-4} (L'(\alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1, -\theta) + L'(\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_l)) \\ & \cap (L'(\alpha_{l-4}, \dots, \alpha_1, \theta) + \mathbb{Z}\alpha_{l-2} + \mathbb{Z}\alpha_{l-1} + \mathbb{Z}\alpha_l) \\ & \cap (L'(\alpha_{l-3}, \dots, \alpha_1, -\theta) + \mathbb{Z}\alpha_{l-1} + \mathbb{Z}\alpha_l)]_W, \end{aligned}$$

où on a noté

$$L'(\beta_1, \dots, \beta_k) = \begin{cases} \mathbb{Z}\beta_1 + \dots + \mathbb{Z}\beta_k & \text{si } k < 4 \\ \{n_1\beta_1 + \dots + n_4\beta_4; n_i \in \mathbb{Z}, n_2 \text{ pair et } \sum n_i \text{ paire}\} & \text{si } k = 4 \\ \{\sum_i n_i\beta_i; n_i \in \mathbb{Z}, n_1, \dots, n_{k-2} \text{ pairs et } \sum n_i \text{ paire}\} & \text{si } k > 4 \end{cases}.$$

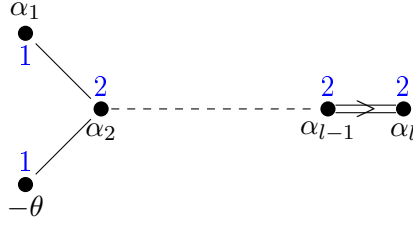
Ainsi,

$$L(\mathbf{D}_l; \alpha_1, \dots, \alpha_l) = [L'(\alpha_1, \dots, \alpha_l)]_W$$

(en remplaçant  $\theta$  par son expression en fonction des  $\alpha_i$  et en calculant les intersections). Or,  $L'(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  est  $W$ -invariant. On voit cela de la même manière que pour  $\mathbf{D}_4$ , en calculant l'image d'un élément de ce réseau par les réflexions simples  $s_1, \dots, s_l$ . D'où  $L(\mathbf{D}_l; \alpha_1, \dots, \alpha_l) = L'(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ , ce qui est la forme annoncée dans l'énoncé.

Cas  $\mathbf{B}_l$  ( $l \geq 3$ ) :

Allure du diagramme de Dynkin étendu :



$$\begin{aligned}
L(\mathbf{B}_l; \alpha_1, \dots, \alpha_l) &= [(\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\theta + L(\mathbf{B}_{l-2}; \alpha_3, \dots, \alpha_l)) \\
&\quad \cap (L(\mathbf{A}_3; \alpha_1, \alpha_2, -\theta) + L(\mathbf{B}_{l-3}; \alpha_4, \dots, \alpha_l)) \\
&\quad \cap \bigcap_{i=4}^{l-3} (L(\mathbf{D}_i; \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1, -\theta) + L(\mathbf{B}_{l-i}; \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_l)) \\
&\quad \cap (L(\mathbf{D}_{l-2}; \alpha_{l-3}, \dots, \alpha_1, -\theta) + L(\mathbf{C}_2; \alpha_{l-1}, \alpha_l)) \\
&\quad \cap (L(\mathbf{D}_{l-1}; \alpha_{l-2}, \dots, \alpha_1, -\theta) + \mathbb{Z}\alpha_l) \\
&\quad L(\mathbf{D}_l; \alpha_{l-1}, \dots, \alpha_1, -\theta)]_W
\end{aligned}$$

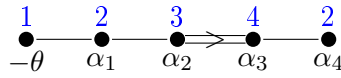
(car, si on enlève le sommet correspondant à  $\alpha_1$  ou  $-\theta$ , on retrouve  $\mathbf{B}_l$ ). On suppose alors avoir déjà prouvé le cas  $\mathbf{C}_2$  (qui n'est pas compliqué), on raisonne par récurrence et donc suppose vrai le résultat annoncé pour  $\mathbf{B}_k$  ( $3 \leq k < l$ ) dans l'énoncé, et on reprend les notations utilisées lorsque l'on a traité le cas  $\mathbf{D}_l$  :

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{B}_l; \alpha_1, \dots, \alpha_l) &= [(\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}2\alpha_3 + \dots + \mathbb{Z}2\alpha_l) \\
&\quad \cap (\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2 + \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}2\alpha_4 + \dots + \mathbb{Z}2\alpha_l) \\
&\quad \cap \bigcap_{i=4}^{l-3} (L'(\alpha_{i-1}, \dots, \alpha_1, -\theta) + \mathbb{Z}2\alpha_{i+1} + \dots + \mathbb{Z}2\alpha_l) \\
&\quad \cap (L'(\alpha_{l-3}, \dots, \alpha_1, -\theta) + \mathbb{Z}2\alpha_{l-1} + \mathbb{Z}\alpha_l) \\
&\quad \cap (L'(\alpha_{l-2}, \dots, \alpha_1, -\theta) + \mathbb{Z}\alpha_l) \\
&\quad \cap L'(\alpha_{l-1}, \dots, \alpha_1, -\theta)]_W \\
&= [\mathbb{Z}2\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}2\alpha_l]_W \\
&= 2[Q]_W \\
&= 2Q
\end{aligned}$$

(car  $Q$  est  $W$ -stable).

Cas  $\mathbf{F}_4$  :

Diagramme de Dynkin étendu :



Matrice de Cartan :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{F}_4; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= [(\mathbb{Z}\theta + L(\mathbf{C}_3; \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2)) \cap (L(\mathbf{A}_2; -\theta, \alpha_1) \\
&\quad + L(\mathbf{A}_2; \alpha_3, \alpha_4)) \cap L(\mathbf{B}_4; -\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)]_W
\end{aligned}$$

(car le coefficient du sommet associé à  $\alpha_3$  n'est pas premier ni 1, et car, si on enlève le sommet associé à  $-\theta$ , on retombe sur tout  $F_4$ ). En supposant cette fois-ci avoir déjà traité le cas  $C_3$  (guère plus compliqué que  $C_2$ ),

$$\begin{aligned}
L(F_4; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= [(\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}2\alpha_4 + \mathbb{Z}2\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_2) \\
&\quad \cap (\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4) \\
&\quad \cap (\mathbb{Z}2\theta + \mathbb{Z}2\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}2\alpha_3)]_W \\
&= [(\mathbb{Z}2\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_4 + \mathbb{Z}2\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_2) \\
&\quad \cap (\mathbb{Z}3\alpha_2 + \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4) \\
&\quad \cap (\mathbb{Z}4\alpha_4 + \mathbb{Z}2\alpha_1 + \mathbb{Z}2\alpha_2 + \mathbb{Z}2\alpha_3)]_W \\
&= \underbrace{[\mathbb{Z}2\alpha_1 + \mathbb{Z}6\alpha_2 + \mathbb{Z}2\alpha_3 + \mathbb{Z}4\alpha_4]}_M)_W.
\end{aligned}$$

Considérons le sous-réseau  $L = \mathbb{Z}6\alpha_1 + \mathbb{Z}6\alpha_2 + \mathbb{Z}12\alpha_3 + \mathbb{Z}12\alpha_4$  de  $M$ . Il est  $W$ -stable. En effet, il suffit de calculer l'image de  $6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12n_4\alpha_4 \in \mathbb{Z}6\alpha_1 + \mathbb{Z}6\alpha_2 + \mathbb{Z}12\alpha_3 + \mathbb{Z}12\alpha_4$  par les réflexions simples :

$$\begin{aligned}
s_1(6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12n_4\alpha_4) &= 6(n_2 - n_1)\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12n_4\alpha_4 \\
s_2(6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12n_4\alpha_4) &= 6n_1\alpha_1 + 6(n_1 - n_2 + 2n_3)\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12n_4\alpha_4 \\
s_3(6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12n_4\alpha_4) &= 6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12(n_2 - n_3 + n_4)\alpha_3 + 12n_4\alpha_4 \\
s_4(6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12n_4\alpha_4) &= 6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 12(n_3 - n_4)\alpha_4.
\end{aligned}$$

Donc  $L \subset [M]_W$ . Réciproquement, soit  $\mu \in [M]_W$ . Alors, pour tout  $w \in W$ , comme  $[M] \cap_{w' \in W} w'M$ , en particulier  $\mu \in w^{-1}M$  et donc  $w\mu \in M$ . Or, pour tout  $w \in W$  et tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$s_i(w\mu) = w\mu - (w\mu)(\alpha_i^\vee)\alpha_i.$$

Donc, pour tout  $w \in W$ ,  $w\mu(\alpha_2^\vee) \in 6\mathbb{Z}$  et  $w\mu(\alpha_4^\vee) \in 4\mathbb{Z}$ . De plus, le groupe de Weyl  $W$  agit transitivement sur les racines (ou coracines) de même longueur (voir par exemple [Hum72], partie 10.4, lemme C), ce qui est le cas de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . D'où  $\alpha_1^\vee \in W\alpha_2^\vee$ . Ainsi,

$$\mu(\alpha_1^\vee) \in 6\mathbb{Z}, \quad \mu(\alpha_2^\vee) \in 6\mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad \mu(\alpha_4^\vee) \in 4\mathbb{Z}.$$

Appliquons ceci à  $\mu = 2n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 2n_3\alpha_3 + 4n_4\alpha_4 \in [M]_W$  : comme

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha_1^\vee) &= 2n_1\alpha_1(\alpha_1^\vee) + 6n_2\alpha_2(\alpha_1^\vee) + 2n_3\alpha_3(\alpha_1^\vee) + 4n_4\alpha_4(\alpha_1^\vee) = 4n_1 - 6n_2, \\
\mu(\alpha_2^\vee) &= -2n_1 + 12n_2 - 2n_3, \\
\mu(\alpha_4^\vee) &= -2n_3 + 8n_4,
\end{aligned}$$

on a  $4n_1 - 6n_2 \in 6\mathbb{Z}$ ,  $-2n_1 + 12n_2 - 2n_3 \in 6\mathbb{Z}$ , et  $-2n_3 + 8n_4 \in 4\mathbb{Z}$ . Ainsi,  $n_1 \in 3\mathbb{Z}$  et  $n_3 \in 6\mathbb{Z}$ , et donc  $\mu \in \mathbb{Z}6\alpha_1 + \mathbb{Z}6\alpha_2 + \mathbb{Z}12\alpha_3 + \mathbb{Z}4\alpha_4$ . Enfin, si on écrit  $\mu = 6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + 12n_3\alpha_3 + 4n_4\alpha_4$ ,

$$s_3(\mu) = 6n_1\alpha_1 + 6n_2\alpha_2 + (12(n_2 - n_3) + 4n_4)\alpha_3 - 4n_4\alpha_4.$$

Donc  $n_4 \in 3\mathbb{Z}$  et  $\mu \in L$ . Ainsi,

$$L(F_4; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \mathbb{Z}6\alpha_1 + \mathbb{Z}6\alpha_2 + \mathbb{Z}12\alpha_3 + \mathbb{Z}12\alpha_4.$$

Pour les cas non développés ici (i.e.  $C_l$ ,  $G_2$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ , et  $E_8$ ), le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article de Shrawan Kumar [Kum08].  $\square$



## 2 Comportement quasi-polynomial par morceaux pour la dimension des espaces de poids zéro

Cette section se base sur un autre article écrit par Shrawan Kumar, en collaboration avec Dipendra Prasad [KP14]. L'objectif est cette fois-ci d'étudier la variation de la dimension de l'espace de poids zéro de la représentation irréductible  $V(\lambda)$ , lorsque  $\lambda$  parcourt l'ensemble des poids entiers dominants du tore maximal considéré. Le théorème principal obtenu par Kumar et Prasad énonce que cette dimension est une fonction quasi-polynomiale par morceaux sur le cône polyédral des poids entiers dominants. "Par morceaux" signifie que la fonction est définie par un quasi-polynôme sur différentes "chambres", que l'on va définir (ce qui se traduit par une condition donnée par des inégalités linéaires). "Quasi-polynomiale" signifie qu'elle est définie, sur chacune de ces chambres, par un polynôme sur différentes classes modulo un sous-réseau de  $Q$ , que l'on va définir également (ce qui se traduit par une condition arithmétique).

### 2.1 Définition du cadre de cette section

On considère à présent un groupe  $G$ , de nouveau algébrique, semi-simple et connexe sur  $\mathbb{C}$ , mais cette fois-ci adjoint au lieu de simplement connexe. On fixe toujours un tore maximal  $T$  et un sous-groupe de Borel  $B$  tels que  $T \subset B$ . On reprend les notations de la partie 1.2 en ce qui concerne :

- les lettres gothiques pour les algèbres de Lie ;
- les ensembles des racines et racines positives, celui des racines simples ;
- le groupe de Weyl, les réflexions simples ;
- les réseaux des racines, des poids, et des coracines ;
- l'ensemble des poids entiers dominants, et le groupe des caractères de  $T$  ;
- la représentation irréductible de  $G$  de plus haut poids un poids entier dominant.

Remarquons tout de même une différence concernant le groupe  $X^*(T)$  des caractères de  $T$  : par la même méthode que précédemment -en prenant les dérivées-, on peut injecter  $X^*(T)$  dans  $\mathfrak{t}^*$ . Par contre, à la différence de la section précédente -où on avait  $X^*(T) \simeq \Lambda$ -, on a à présent  $X^*(T) \simeq Q$  car  $G$  est un groupe adjoint.

On définit de plus quelques autres objets : tout d'abord l'ensemble des poids entiers dominants réguliers

$$\Lambda^{++} = \{\lambda \in \Lambda^+ / \forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \lambda(\alpha_i^\vee) \neq 0\}.$$

On note également  $\Lambda(\mathbb{R}) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par le réseau des poids, et  $\Lambda^+(\mathbb{R})$  (respectivement  $\Lambda^{++}(\mathbb{R})$ ) le cône engendré par  $\Lambda^+$  (respectivement  $\Lambda^{++}$ ). Une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\Lambda(\mathbb{R})$  est formée des poids fondamentaux : pour  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , on définit le  $i$ -ème poids fondamental par, pour tout  $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,

$$\varpi_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{i,j}.$$

Alors,

$$\Lambda^+(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{R}_+ \varpi_i \quad \text{et} \quad \Lambda^{++}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{R}_+^* \varpi_i.$$

On désignera de plus, pour tout  $\lambda \in \Lambda(\mathbb{R})$ ,  $z_\lambda = (z_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket}$  les coordonnées de  $\lambda$  dans la base  $(\varpi_1, \dots, \varpi_l)$ .

Remarquons que l'on n'a pas pris, dans cette section, de sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$ . En fait, le sous-groupe parabolique que l'on va considérer est  $B$  lui-même. On note donc à partir de maintenant  $Y = G/B$  et on a, pour tout caractère  $\lambda \in X^*(T)$ , le même fibré en droites  $T$ -linéarisé que dans la section 1 sur  $Y$  :

$$\mathcal{L}(\lambda) = G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}.$$

Comme précédemment, ce fibré en droites est ample si et seulement si  $\lambda \in \Lambda^{++}$  (i.e.  $\lambda$  est dominant régulier).

**Définition 2.1.** Si  $\lambda \in \Lambda^{++}(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Q}_+^* \varpi_i$ , on note  $Y^{ss}(\lambda)$  l'ensemble des points semi-stables de  $Y$  par rapport au fibré en droites  $\mathcal{L}(d\lambda)$ , pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d\lambda \in \Lambda^{++}$ .

Deux éléments  $\lambda, \mu \in \Lambda^{++}(\mathbb{R})$  sont dits GIT-équivalents si  $Y^{ss}(\lambda) = Y^{ss}(\mu)$ .

Ce dernier point définit une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour celle-ci sont appelées GIT-classes. Nous reviendrons dessus ultérieurement. Donnons à présent deux définitions venant préciser des termes que l'on a utilisés au tout début de cette section.

**Définition 2.2.** Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\Lambda^+$ . Une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{Q}$  est dite polynomiale s'il existe un polynôme  $\hat{f} \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_l]$  tel que, pour tout  $\lambda \in S$ ,  $f(\lambda) = \hat{f}(z_\lambda)$ .

**Définition 2.3.** Un cône polyédral rationnel  $C$  dans  $\Lambda^{++}(\mathbb{R})$  est un sous-ensemble de  $\Lambda^{++}(\mathbb{R})$  défini par un nombre fini d'inégalités linéaires à coefficients rationnels.

Pour toute forme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $f$  sur  $\Lambda(\mathbb{R})$  positive sur  $C$ ,

$$\{c \in C / f(c) = 0\} (= \text{Ker}(f) \cap C)$$

est appelée une face de  $C$ .

Revenons maintenant sur les GIT-classes : comme on peut le voir -par exemple- dans un article de Nicolas Ressayre [Res00], toute GIT-classe dans  $\Lambda^{++}(\mathbb{R})$  est l'intérieur d'un cône polyédral rationnel dans  $\Lambda^{++}(\mathbb{R})$ . De plus, il y a un nombre fini de telles classes. Celles qui sont de dimension maximale (i.e. celle de  $\Lambda(\mathbb{R})$ ) sont appelées chambres. Notons-les  $C_1, \dots, C_N$  et notons, pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $Y_T(C_k)$  le GIT-quotient  $Y^{ss}(\lambda) // T$  pour  $\lambda \in C_k$ .

**Remarque :** Comme dans la partie 1.3, puisque, pour tout  $\lambda \in \Lambda^+$ , l'espace de poids zéro de  $V(\lambda)$  est non trivial, on a que  $Y^{ss}(\lambda) \neq \emptyset$  pour tout  $\lambda \in \Lambda^{++}(\mathbb{R})$ .

Finissons cette partie par une dernière notation : on note  $\mathfrak{t}_+ = \{x \in \mathfrak{t} / \forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \alpha_i(x) \in \mathbb{R}_+\}$  la chambre de Weyl fondamentale. On a clairement, en notant  $(x_1, \dots, x_l)$  la base de  $\mathfrak{t}$  antéduale de base de  $\mathfrak{t}^*$  formée des racines simples  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  (i.e., pour tous  $i, j \in \llbracket 1, l \rrbracket, \alpha_i(x_j) = \delta_{i,j}$ ),

$$\mathfrak{t}_+ = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{R}_+ x_i.$$

## 2.2 Partie préliminaire au résultat principal (critère de Hilbert-Mumford et utilisations)

La première chose que nous allons faire dans cette partie est donner le critère de Hilbert-Mumford, qui permet de caractériser les points stables et semi-stables (et par conséquent les points instables). Il faut pour cela commencer par définir le nombre  $\mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma)$ . On se base pour cela sur le chapitre 9 du livre d'Igor Dolgachev [Dol03].

Soient  $S$  un groupe réductif connexe et  $X \subset \mathbb{P}^n$  une variété projective sur laquelle  $S$  agit via une représentation linéaire  $\rho : S \rightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$  (cela peut s'obtenir en prenant un fibré en droites très ample  $S$ -linéarisé sur  $X$  ; voir pour cela le chapitre 7 de [Dol03]). Soient de plus  $\mathcal{L}$  un fibré en droites  $S$ -linéarisé sur  $X$ , et  $x \in X$ . On note  $x^* \in \mathbb{C}^{n+1}$  un représentant de  $x$ , i.e.  $[x^*] = x$ . On sait, d'après la fin de la section 8.1 de [Dol03], que  $x \in X^{us}(\mathcal{L})$  si et seulement si  $0 \in \overline{\rho(S)(x^*)}$ . Ainsi, on peut détecter si le point  $x$  est instable en trouvant un sous-groupe  $H$  de  $S$  tel que  $0 \in \overline{\rho(H)(x^*)}$ . On va s'intéresser à des sous-groupes très particuliers de  $S$  : les sous-groupes à un paramètre, dont l'ensemble est noté  $X_*(S)$ . Soit  $\sigma : \mathbb{C}^* \rightarrow S$  un homomorphisme nous donnant un tel sous-groupe. Cela nous donne une application régulière

$$\begin{aligned} \sigma_x : \mathbb{C}^* &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \rho(\sigma(t))(x) \end{aligned} .$$

Comme  $X$  est une variété projective, ce dernier se prolonge (de manière unique) en une application régulière  $\tilde{\sigma}_x : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  (car  $\mathbb{C}^*$  s'injecte de manière dense dans  $\mathbb{P}^1$ , par exemple par  $t \mapsto [t : 1]$ ). On pose alors  $y = \tilde{\sigma}_x(0) \in X$ . Ce point est  $\mathbb{C}^*$ -invariant (pour l'action de  $\mathbb{C}^*$  via  $\sigma$ ), donc la fibre de  $\mathcal{L}$  au-dessus de  $y$  est une représentation de dimension 1 de  $\mathbb{C}^*$ . Elle est ainsi caractérisée par un caractère  $\chi$  de  $\mathbb{C}^*$ . Rappelons enfin que les caractères de  $\mathbb{C}^*$  sont en bijection avec  $\mathbb{Z}$ . On note  $\varphi : X^*(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathbb{Z}$  cette bijection.

**Définition 2.4.** On définit l'entier  $\mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma)$  par

$$\mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma) = \varphi(\chi).$$

On peut voir cet entier de manière peut-être un peu plus explicite en prenant des coordonnées. Dans des coordonnées particulière de  $\mathbb{C}^{n+1}$  (dans une base de vecteurs propres pour l'action de  $\sigma(\mathbb{C}^*)$ ), il existe  $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \rho(\sigma(t))(x^*) = (t^{m_0}x_0, \dots, t^{m_n}x_n),$$

en notant  $(x_0, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x^*$  dans la base choisie. On a alors plutôt facilement :

$$\mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma) = \min_{i/x_i \neq 0} (m_i).$$

(On peut voir ceci dans [Dol03] ou dans [MFK94]. Il faut simplement faire attention au fait que les deux prennent des conventions opposées concernant le signe de cet entier.) On a alors le critère de Hilbert-Mumford, qui justifie l'introduction de cet entier  $\mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma)$ .

**Proposition 2.1.** (*Critère de Hilbert-Mumford*)

Soient  $S$  un groupe réductif connexe agissant sur une variété projective  $X$ ,  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample  $S$ -linéarisé sur  $X$ , et un point  $x \in X$ . Alors,

$$x \in X^{ss}(\mathcal{L}) \iff \forall \sigma \in X_*(S), \mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma) \leq 0$$

et

$$x \in X^s(\mathcal{L}) \iff \forall \sigma \in X_*(S), \mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma) < 0.$$

*Démonstration.* On peut là aussi la trouver dans [Dol03, MFK94]. De même, il faut se méfier des signes opposés choisis dans ces deux livres.  $\square$

Nous allons alors utiliser ce critère afin d'obtenir quelques résultats sur les points stables et semi-stables dans le cadre défini lors de la partie précédente.

**Lemme 2.2.** Pour tout  $\lambda \in \Lambda^{++}$ , l'ensemble  $Y^s(\lambda)$  des points stables est non vide.

*Démonstration.* Soient  $\lambda \in \Lambda^{++}$  et  $v_\lambda \in V(\lambda) \setminus \{0\}$  un vecteur de plus haut poids. Considérons le plongement

$$i_\lambda : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{P}(V(\lambda)) \\ gB & \longmapsto & [g.v_\lambda] \end{array}.$$

On a alors  $\mathcal{L}(\lambda) = i_\lambda^* \left( \mathcal{O}(1)|_{i_\lambda(Y)} \right)$  (il s'agit exactement du même genre de manipulations que fait Dolgachev dans le chapitre 7 de [Dol03]). Posons

$$U_\lambda = \{gB \in Y / \forall w \in W, g.v_\lambda \text{ a une composante non nulle selon } V(\lambda)_{w.\lambda}\}$$

(où l'on note, pour tout  $\mu \in X^*(T)$ ,  $V(\lambda)_\mu$  le sous-espace de  $V(\lambda)$  de poids  $\mu$ ). Montrons que  $U_\lambda \neq \emptyset$  :

Supposons que  $U_\lambda = \emptyset$ , i.e., pour tout  $gB \in Y$ , il existe  $w \in W$  tel que  $g.v_\lambda$  a une composante nulle selon  $V(\lambda)_{w.\lambda}$ . Alors,  $\{g.v_\lambda ; gB \in Y\}$  est inclus dans une réunion

d'hyperplans de  $V(\lambda)$ . Par irréductibilité, il est donc inclus dans un de ces hyperplans. Ceci contredit l'irréductibilité de  $V(\lambda)$ , donc  $U_\lambda$  n'est pas vide.

Montrons que  $U_\lambda \subset Y^s(\lambda)$  : c'est là que nous allons utiliser le critère de Hilbert-Mumford. Il suffit de montrer que, pour tout  $gB \in U_\lambda$  et tout  $\sigma \in X_*(T)$  non constant,  $\mu^{\mathcal{L}(\lambda)}(gB, \sigma) < 0$ . Soient  $gB \in U_\lambda$  et  $\sigma \in X_*(T)$  non constant. On écrit

$$g.v_\lambda = \sum_{\mu \in X^*(T)} v'_\mu.$$

La dérivée de  $\sigma$  en 1, que l'on va noter ici  $\sigma'$ , est une application linéaire  $\text{Lie}(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathfrak{t}$ . Or,  $\text{Lie}(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{C}$ , donc  $\sigma'$  est entièrement déterminée par sa valeur en 1, qui est un élément de  $\mathfrak{t}$ , noté  $\dot{\sigma}$ . Alors, d'après la deuxième manière de voir  $\mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma)$  (donnée juste avant la proposition 2.1), (et car la dérivée en 1 de  $t \mapsto t^m$  est  $m$ ),

$$\begin{aligned} \mu^{\mathcal{L}(\lambda)} &= \min\{-\mu(\dot{\sigma}) ; \mu \in X^*(T) / v'_\mu \neq 0\} \\ &= \min\{\mu(-\dot{\sigma}) ; \mu \in Q / v'_\mu \neq 0\} \\ &\quad (\text{car } X^*(T) \simeq Q \subset \mathfrak{t}^*) \\ &\leq \min_{w \in W} ((w.\lambda)(-\dot{\sigma})) \\ &\quad (\text{car, puisque } gB \in U_\lambda, \{w.\lambda ; w \in W\} \subset \{\mu \in Q / v'_\mu \neq 0\}) \\ &= \min_{w \in W} (\lambda(-w.\dot{\sigma})). \end{aligned}$$

Soit à présent  $w \in W$  tel que  $w.\dot{\sigma} \in \mathfrak{t}_+$ . Comme  $\sigma$  est non constant,  $\dot{\sigma} \neq 0$  et  $w.\dot{\sigma} \neq 0$ . De plus,  $\lambda \in \Lambda^{++}$ , donc

$$\lambda \in \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{N}^* \varpi_i.$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $w_i \in \bigoplus_{j=1}^l (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*) \alpha_j$  (il suffit de le vérifier selon le type de  $G$  en regardant les planches I-IX dans [Bou68]). Donc  $\lambda(w.\dot{\sigma}) > 0$  et  $\lambda(-w.\dot{\sigma}) < 0$ . Ainsi,  $gB \in Y^s(\lambda)$  et

$$\emptyset \neq U_\lambda \subset Y^s(\lambda).$$

□

**Proposition 2.3.** *Soit  $\lambda \in \Lambda^{++}$ . Alors,  $Y^s(\lambda) \neq Y^{ss}(\lambda)$  si et seulement s'il existe  $w \in W$  et  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tels que  $\lambda(w.x_i) = 0$ .*

*Démonstration.* **Supposons tout d'abord que  $Y^s(\lambda) \neq Y^{ss}(\lambda)$ .** Soit alors  $x \in Y$  semi-stable mais non stable. Par le critère de Hilbert-Mumford, il existe dans ce cas  $\sigma \in X_*(T)$  non constant tel que  $\mu^{\mathcal{L}(\lambda)}(x, \sigma) = 0$ . De plus, les ensembles  $Y^s(\lambda)$  et  $Y^{ss}(\lambda)$  sont  $N(T)$ -stables : si  $s$  est une section  $T$ -invariante ne s'annulant pas en  $x' \in Y$  et si  $\bar{w} \in N(T)$ , alors  $s' : y \mapsto s(\bar{w}^{-1}.y)$  est une section  $T$ -invariante (car  $\bar{w} \in N(T)$ ) ne s'annulant pas en  $\bar{w}.x'$ . On peut donc faire agir  $W$  et, comme précédemment, envoyer  $\dot{\sigma}$  dans  $\mathfrak{t}_+$ . Quitte à renommer  $\sigma$  ce nouveau sous-groupe à un paramètre, on peut donc supposer que  $\dot{\sigma} \in \mathfrak{t}_+$  (on dit que  $\sigma$  est  $G$ -dominant).

On pose alors  $x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t).x$ , qui, d'après [MFK94] (juste avant le théorème 2.1.) est semi-stable car  $x$  l'est. Considérons à présent l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $G$  suivante :

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \forall g \in G, t.g = \sigma(t)g\sigma(t)^{-1}.$$

On note  $G^\sigma$  le sous-groupe des points fixes pour cette action. On sait qu'il s'agit d'un sous-groupe de Levi connexe de  $G$ . On note de plus  $W_{G^\sigma}$  le groupe de Weyl de  $G^\sigma$  et  $W^{G^\sigma}$  l'ensemble des représentants de longueur minimale des classes dans  $W/W_{G^\sigma}$ .

Via  $\sigma$ ,  $\mathbb{C}^*$  agit également sur  $Y$  (car  $T$  agit sur  $Y$ ) et, si  $Y^\sigma$  est l'ensemble des points fixes pour cette action,

$$Y^\sigma = \bigsqcup_{w \in W^{G^\sigma}} G^\sigma w^{-1}B$$

(cela provient de la décomposition de Bruhat). Vu que  $x_0 \in Y^\sigma$ , il existe  $w \in W^{G^\sigma}$  tel que  $x_0 \in G^\sigma w^{-1}B$ . Ainsi, par les lemmes 1.3 et 1.2,

$$w^{-1}\lambda \in \sum_{\alpha_i \in \Pi(G^\sigma)} \mathbb{Z}\alpha_i,$$

où  $\Pi(G^\sigma)$  est l'ensemble des racines simples de  $G^\sigma$ . De plus,  $G^\sigma$  est un sous-groupe de Levi propre de  $G$  (car  $\sigma$  est non constant). Il existe donc  $\alpha_i \in \Pi \setminus \Pi(G^\sigma)$ . On a ainsi :

$$\lambda(w.x_i) = (w^{-1}.\lambda)(x_i) = 0$$

(car, pour tout  $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $\alpha_j(x_i) = \delta_{i,j}$ ).

**Réciproquement, supposons qu'il existe  $w \in W$  et  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tels que  $\lambda(w.x_i) = 0$ .** En notant, pour tout  $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $L_j$  le sous-groupe de Levi de  $G$  contenant  $T$  tel que  $\Pi(L_j) = \Pi \setminus \{\alpha_j\}$ , on a donc :

$$w^{-1}\lambda \in \sum_{\alpha_j \in \Pi(L_i)} \mathbb{Z}\alpha_j.$$

En outre,

$$\forall w' \in W_{L_i}, \lambda((ww').x_i) = \lambda(w.\underbrace{(w'.x_i)}_{= *x_i}) = 0,$$

donc  $\lambda(w.x_i) = 0$  ne dépend que de la classe de  $w$  modulo  $W_{L_i}$  et on peut ainsi choisir  $w \in W^{L_i}$ . Alors,  $w^{-1}.\lambda$  est un poids dominant pour  $L_i$  (pour obtenir cela, il suffit de faire le calcul en utilisant que  $w \in W^{L_i} \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Delta^+(L_i), w.\alpha \in \Delta^+$ ).

Soit  $v_{w^{-1}.\lambda} \in V(\lambda) \setminus \{0\}$  un vecteur de poids  $w^{-1}.\lambda$ . C'est alors un vecteur de plus haut poids pour  $L_i$  : en effet, comme, pour tout  $\alpha_j \in \Pi(L_i)$ ,  $|w^{-1}.\lambda + \alpha_j| > |\lambda|$ ,  $w^{-1}.\lambda + \alpha_j$  n'est pas un poids de  $V(\lambda)$ .

Ainsi, le sous- $L_i$ -module  $V_{L_i}(w^{-1}.\lambda)$  de  $V(\lambda)$  engendré par  $v_{w^{-1}.\lambda}$  est un  $L_i$ -module irréductible. De plus, par le lemme 1.2, puisque  $w^{-1}.\lambda \in \mathbb{Z}\Pi(L_i)$ ,  $V_{L_i}(w^{-1}.\lambda)$  contient le sous-espace de poids zéro de  $V(\lambda)$ . D'où, en appliquant le lemme 1.3 à la variété

$Z = L_i w^{-1} B$ , il existe  $g \in L_i$  tel que  $g w^{-1} B \in X^{ss}(\lambda)$ .

Il nous reste à montrer que  $g w^{-1} B$  n'est pas stable en utilisant de nouveau le critère de Hilbert-Mumford. On définit le sous-groupe à un paramètre suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_i : \mathbb{C}^* &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto \text{Exp}(t x_i) \end{aligned} .$$

Alors, comme  $g \in L_i$  et par définition de  $x_i$ ,  $g$  fixe  $\sigma_i$ . Par conséquent,

$$\mu^{\mathcal{L}(\lambda)}(g w^{-1} B, \sigma_i) = \mu^{\mathcal{L}(\lambda)}(w^{-1} B, \sigma_i) = 0,$$

ce qui se vérifie par le calcul en utilisant la deuxième façon de voir  $\mu^{\mathcal{L}}(x, \sigma)$  (juste avant la proposition 2.1). Ainsi,  $g w^{-1} B$  n'est pas stable et donc  $g w^{-1} B \in Y^{ss}(\lambda) \setminus Y^s(\lambda)$ .  $\square$

Ce dernier résultat, ainsi que deux autres de Dolgachev et Hu [DH98] que nous n'écrivons pas ici, vont nous permettre d'obtenir une caractérisation des chambres  $C_1, \dots, C_N$  définies dans la partie 2.1. Pour cela, on définit, pour tous  $w \in W$  et  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , l'hyperplan de  $\Lambda(\mathbb{R})$  suivant, fortement lié au résultat précédent :

$$H_{w,i} = \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{R}) / \lambda(w.x_i) = 0\}.$$

**Corollaire 2.4.** *Les chambres  $C_1, \dots, C_N$  sont exactement les composantes connexes de*

$$\Lambda^{++}(\mathbb{R}) \setminus \left( \bigcup_{w \in W, i \in \llbracket 1, l \rrbracket} H_{w,i} \right).$$

*Démonstration.* Cela provient immédiatement de la proposition 2.3 et des théorèmes 3.3.2 et 3.4.2 de [DH98].  $\square$

Avant d'énoncer et démontrer un dernier résultat dans cette partie, rappelons qu'il existe un sous-réseau  $\Gamma$  de  $Q$  tel que, pour tout  $\lambda \in \Lambda^{++} \cap \Gamma$ , le fibré en droites  $\mathcal{L}(\lambda)$  descend en un fibré en droites noté  $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$  sur le GIT-quotient  $Y^{ss}(\lambda) // T$ . Ce réseau  $\Gamma$  dépend du type de  $G$  et est donné par le théorème 1.2.

**Lemme 2.5.** *Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et tout  $\lambda \in \Gamma$ , le fibré en droites  $\mathcal{L}(\lambda)$  descend en un fibré en droites (que l'on notera  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda)$ ) sur le GIT-quotient  $Y_T(C_k)$ .*

*Démonstration.* Soit  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Comme nous venons de le rappeler, par le théorème 1.2, si  $\lambda \in \Lambda^{++} \cap \Gamma$ , alors  $\mathcal{L}(\lambda)$  descend à  $Y^{ss}(\lambda) // T$ . Donc, si  $\lambda \in \Gamma \cap C_k$ , alors  $\mathcal{L}(\lambda)$  descend à  $Y_T(C_k)$  en un fibré en droites que l'on note  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda)$  (en effet :  $\Gamma \cap C_k \subset \Lambda^{++} \cap \Gamma$ ).

Soit  $\mathbb{Z}(\Gamma \cap C_k)$  le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\Gamma \cap C_k$ , qui est un semi-groupe (l'addition est une loi de composition interne associative). Tout  $\lambda \in \mathbb{Z}(\Gamma \cap C_k)$  s'écrit alors  $\lambda_1 - \lambda_2$ , avec  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma \cap C_k$ . Pour un tel  $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ , on définit :

$$\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda) = \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_1) \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_2)^*.$$

Pour montrer que ce  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda)$  est bien défini, il faut justifier que la définition précédente ne dépend pas de la décomposition  $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$  choisie. On suppose donc que  $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda = \lambda'_1 - \lambda'_2$ , avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2 \in \Gamma \cap C_k$ . Alors,

$$\lambda_1 + \lambda'_2 = \lambda'_1 + \lambda_2 \in \Gamma \cap C_k,$$

et donc

$$\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_1 + \lambda'_2) = \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda'_1 + \lambda_2).$$

De plus, par unicité de  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda)$  (voir par exemple [Tel00]),  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_1 + \lambda'_2) \simeq \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_1) \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda'_2)$  (idem pour  $\lambda'_1 + \lambda_2$ ). D'où

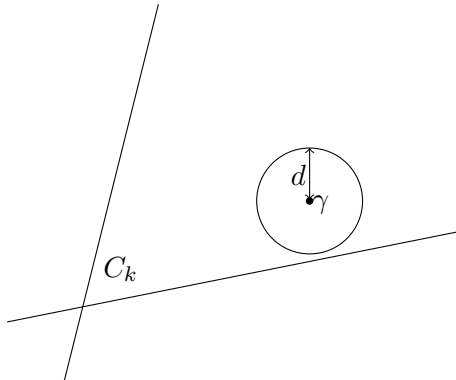
$$\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_1) \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda'_2) \simeq \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_2) \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda'_1),$$

i.e.

$$\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_2)^* \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda_1) \simeq \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda'_1) \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda'_2)^*$$

(car, pour tout fibré en droites  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^*$  est le fibré trivial). Ainsi,  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda)$  est bien défini pour  $\lambda \in \mathbb{Z}(\Gamma \cap C_k)$ .

Montrons enfin que  $\mathbb{Z}(\Gamma \cap C_k) = \Gamma$  : commençons par remarquer que, d'après le corollaire 2.4,  $C_k$  est un cône convexe ouvert dans  $\Lambda(\mathbb{R})$ . Soit  $(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Gamma$ . On prend une norme sur  $\Lambda(\mathbb{R})$  (peu importe laquelle : elles sont toutes équivalentes puisque  $\Lambda(\mathbb{R})$  est de dimension finie  $l$ ). Notons  $d = \max_{i \in [1, l]} \|\gamma_i\|$ . Il existe alors  $\gamma \in \Gamma \cap C_k$  tel que la boule fermée de centre  $\gamma$  et de rayon  $d$  soit contenue dans  $C_k$  :



Alors, pour tout  $i \in [1, l]$ ,  $\gamma + \gamma_i$  est dans cette boule, et donc  $\gamma + \gamma_i \in \Gamma \cap C_k$ . Ainsi,  $\gamma_i = \gamma + \gamma_i - \gamma \in \mathbb{Z}(\Gamma \cap C_k)$ . Finalement,  $\Gamma \subset \mathbb{Z}(\Gamma \cap C_k)$ . D'où  $\Gamma = \mathbb{Z}(\Gamma \cap C_k)$  (l'inclusion réciproque étant évidente puisque  $(\Gamma, +)$  est un groupe).

Ainsi,  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda)$  est bien défini pour tout  $\lambda \in \Gamma$ . □

### 2.3 Le théorème principal

On va maintenant pouvoir obtenir le résultat annoncé au tout début de cette section 2 : le fait que la dimension de l'espace de poids zéro de  $V(\lambda)$  est une fonction (de



$\lambda$ ) quasi-polynomiale par morceaux ("par morceaux " car le polynôme va dépendre de la chambre  $C_k$  dans laquelle on se trouve, et "quasi-" car il va également dépendre d'une classe  $\mu + \Gamma$  sur laquelle on se place). Afin de l'énoncer, on note, pour tout  $\lambda \in \Lambda^+$ ,  $V(\lambda)_0$  le sous-espace de poids zéro de  $V(\lambda)$ . De plus, on définit

$$\begin{aligned} \mu_0 : \Lambda^+ &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \lambda &\longmapsto \dim V(\lambda)_0 \end{aligned} .$$

La démonstration du résultat qui suit utilise des résultats importants et complexes de Geometric Invariant Theory (comme le théorème de Borel-Weil-Bott) et de géométrie algébrique (le théorème de Riemann-Roch), que nous n'avons absolument pas la place de détailler (ce n'est en plus pas spécialement le but de ce mémoire), et même, pas eu le temps d'étudier précisément pendant le stage. Nous donnerons donc simplement des références dans lesquelles on peut trouver ces théories et théorèmes : [Per95, Har77] pour la cohomologie de Čech, [FH91, Kos61] pour les théorèmes de Borel-Weil et Borel-Weil-Bott, et [Ful84] pour le théorème de Riemann-Roch, les groupes de Chow, et les classes de Chern. On utilisera également beaucoup un article de C. Teleman [Tel00].

**Théorème 2.1.** *Soit  $G$  un groupe algébrique simple, adjoint, et connexe. Soient  $\mu \in Q$  et  $\bar{\mu} = \mu + \Gamma$  sa classe modulo  $\Gamma$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , il existe une fonction polynomiale  $f_{\bar{\mu}, k} : \Lambda(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$  de degré au plus  $\sharp\Delta^+ - l$ , à coefficients rationnels, telle que :*

$$\forall \lambda \in \bar{C}_k \cap \bar{\mu}, \quad \mu_0(\lambda) = f_{\bar{\mu}, k}(\lambda),$$

en notant  $\bar{C}_k$  l'adhérence de  $C_k$  dans  $\Lambda(\mathbb{R})$ . De plus,  $f_{\Gamma, k}$  a pour terme constant 1.

*Démonstration.* Tout d'abord on a, par le théorème de Borel-Weil-Bott, pour tout  $\lambda \in \Lambda^+$ ,

$$\begin{cases} \dim (H^0(Y, \mathcal{L}(\lambda))^T) = \mu_0(\lambda) \\ \dim (H^p(Y, \mathcal{L}(\lambda))) = 0 \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* .$$

(car ce théorème nous donne que  $H^p(Y, \mathcal{L}(\lambda))$  est trivial pour tout  $p$  sauf un seul -ici 0-, pour lequel on obtient  $V(\lambda)^*$ ).

Soit  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . On commence par le cas où  $\lambda \in C_k \cap \bar{\mu}$ . Notons  $\pi : Y^{ss}(C_k) \longrightarrow Y_T(C_k)$  la projection canonique. Pour tout faisceau  $\mathcal{F}$   $T$ -équivariant sur  $Y^{ss}(C_k)$ , on définit le faisceau  $\pi_*^T(\mathcal{F})$   $T$ -invariant qui est l'image directe de  $\mathcal{F}$  comme faisceau sur  $Y_T(C_k)$  dont les sections sur tout ouvert  $U$  sont les sections  $T$ -invariantes de  $\mathcal{F}$  sur  $\pi^{-1}(U)$ . Alors, par le lemme 2.5 et par la formule de projection pour  $\pi_*^T$ ,

$$\pi_*^T(\mathcal{L}(\lambda)) \simeq \pi_*^T(\mathcal{L}(\mu)) \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\lambda - \mu).$$

D'autre part, par une remarque de [Tel00] (3.3 (i)) ou une de [Per95],

$$H^p(Y_T(C_k), \pi_*^T(\mathcal{L}(\lambda))) \simeq \begin{cases} H^0(Y, \mathcal{L}(\lambda))^T & \text{si } p = 0 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases} ,$$

et donc

$$\mu_0(\lambda) = \chi(Y_T(C_k), \pi_*^T(\mathcal{L}(\lambda))),$$

où  $\chi$  désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré (si  $Z$  est une variété projective et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $Z$ ,  $\chi(Z, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim H^i(Z, \mathcal{F})$ ).

Mais, maintenant, pour obtenir le polynôme cherché, il nous faut considérer une  $\mathbb{Z}$ -base  $(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$  de  $\Gamma$ . Notre  $\lambda$  précédent s'écrit alors  $\mu + \sum_{i=1}^l a_i \gamma_i$ , avec  $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}$ . De plus on a, par ce qui précède,

$$\pi_*^T(\mathcal{L}(\lambda)) \simeq \pi_*^T(\mathcal{L}(\mu)) \otimes \hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\sum_{i=1}^l a_i \gamma_i).$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Riemann-Roch pour des variétés singulières (théorème 18.3 de [Ful84] au faisceau  $\pi_*^T(\mathcal{L}(\lambda))$ ,

$$\begin{aligned} \mu_0(\lambda) &= \chi(Y_T(C_k), \pi_*^T(\mathcal{L}(\lambda))) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{Y_T(C_k)} \frac{(a_1 c_1(\gamma_1) + \dots + a_l c_1(\gamma_l))^n}{n!} \cap \tau(\pi_*^T(\mathcal{L}(\mu))), \end{aligned}$$

où  $\tau(\pi_*^T(\mathcal{L}(\mu)))$  est une classe du groupe de Chow  $A_*(Y_T(C_k)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et, pour tout  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ ,  $c_1(\gamma_i)$  est la première classe de Chern du fibré en droites  $\hat{\mathcal{L}}_{C_k}(\gamma_i)$ . Comme, pour  $n$  assez grand ( $> \dim_{\mathbb{C}}(Y_T(C_k))$ ),  $(a_1 c_1(\gamma_1) + \dots + a_l c_1(\gamma_l))^n$  vit dans un  $H^i$  qui est nul, on obtient que, pour  $\lambda \in C_k \cap \bar{\mu}$ ,  $\mu_0(\lambda)$  est bien un polynôme  $f_{\bar{\mu}, k}$  à coefficients rationnels en les variables  $a_1, \dots, a_l$ .

De plus, comme (par le lemme 2.2)  $Y^s(C_k) \neq \emptyset$ ,  $\dim(Y_T(C_k)) = \dim_{\mathbb{C}}(Y) - l$ . Ainsi, le degré de  $f_{\bar{\mu}, k}$  est au plus  $\dim_{\mathbb{C}}(Y) - l$ , ce qui termine le cas  $\lambda \in C_k \cap \bar{\mu}$ .

Soit désormais  $\lambda \in \overline{C_k} \cap \bar{\mu}$ . On prend alors  $P$  l'unique sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$  tel que  $\mathcal{L}(\lambda)$  descend en un fibré en droites ample  $\mathcal{L}^P(\lambda)$  sur  $Y^P = G/P$  via la projection canonique  $q : G/B \rightarrow G/P$ . Supposons que  $\mu \in C_k \cap Q$ .

D'après le paragraphe 1.2 de [Tel00] appliqué à  $q$ , on a que  $q^*(\mathcal{L}^P(\lambda))$  est, pour tout petit rationnel  $\varepsilon > 0$ , adapté à la stratification induite sur  $Y$  par  $q^*(\mathcal{L}^P(\lambda)) + \varepsilon \mathcal{L}(\lambda)$ . Ainsi, d'après le théorème 3.2.a et la remarque 3.3 de [Tel00], on obtient

$$\mu_0(\lambda) = \chi(Y_T(C_k), \pi_*^T q^*(\mathcal{L}^P(\lambda))) = \chi(Y_T(C_k), \pi_*^T(\mathcal{L}(\lambda))).$$

En utilisant alors de nouveau le théorème de Riemann-Roch comme à la fin du cas précédent, on a que  $\mu_0(\lambda) = f_{\bar{\mu}, k}(\lambda)$  pour  $\lambda \in \overline{C_k} \cap \bar{\mu}$ .

De plus, d'après l'expression donnée par Riemann-Roch, le terme constant de  $f_{\Gamma, k}$  est

$$\chi(Y_T(C_k), \pi_*^T(\mathcal{L}(0))).$$

Or, comme  $\mu_0(0) = 1$ , ce terme vaut 1 par ce qui précède.  $\square$

## 2.4 Exemples d'obtention des polynômes $f_{\bar{\mu},k}$

On peut remarquer que le théorème précédent et sa démonstration ne donnent pas d'expression explicite pour obtenir ces polynômes, ce qui en rend la détermination très compliquée en général. On va pouvoir les calculer dans certains cas particuliers en utilisant des lois de branchements connues sur certains groupes. C'est le cas pour des groupes de types  $A_2$  et  $B_2$ , et l'on va commencer par cela. Cela permettra ensuite d'obtenir l'expression de la dimension du sous-espace de poids zéro pour le groupe  $GL_4(\mathbb{C})$ .

### 2.4.1 Cas de groupes de type $A_2$ et $B_2$

Commençons par le cas  $A_2$ . On va chercher à calculer la dimension du sous-espace de poids zéro d'une représentation irréductible de  $GL_3(\mathbb{C})$ . Rappelons pour cela un certain nombre de propriétés bien connues propres à ces représentations particulières, que l'on peut trouver dans [GW09].

Tout d'abord, les représentations irréductibles de  $GL_3(\mathbb{C})$  sont caractérisées par leur plus haut poids, qui correspond à un triplet d'entiers  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . De plus, pour une représentation irréductible de plus haut poids  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , une condition nécessaire et suffisante pour avoir un sous-espace de poids zéro non trivial est d'être de caractère central trivial (i.e. le centre de  $GL_3(\mathbb{C})$  agit trivialement), ce qui se traduit par  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ .

En outre, pour déterminer l'espace de poids zéro d'une telle représentation, il suffit de la restreindre à  $GL_2(\mathbb{C})$  (en identifiant  $GL_2(\mathbb{C})$  à un sous-ensemble de  $GL_3(\mathbb{C})$ ). Elle se décompose alors en une somme de représentations irréductibles caractérisées par leurs plus hauts poids, qui sont les couples  $(\mu_1, \mu_2)$  d'entiers tels que

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3,$$

et qui apparaissent avec multiplicité 1 (ceci est la loi de branchement de Gelfand-Zetlin, que l'on connaît pour  $GL_n(\mathbb{C})$ ). On regarde ensuite, parmi ces représentations irréductibles de  $GL_2(\mathbb{C})$ , lesquelles possèdent un sous-espace de poids zéro non trivial : il s'agit de celles qui sont de caractère central trivial (i.e.  $\mu_1 + \mu_2 = 0$ ), et dans ce cas l'espace de poids zéro est de dimension 1. Il nous reste enfin à ajouter ces dimensions pour obtenir la dimension du sous-espace de poids zéro de la représentation de  $GL_3(\mathbb{C})$  de départ. Cela nous permet d'obtenir la :

**Proposition 2.6.** *Soit  $V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  une représentation irréductible de  $GL_3(\mathbb{C})$  de plus haut poids  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , et de caractère central trivial, i.e.  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Alors, l'espace de poids zéro de  $V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  est de dimension*

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 1 & \text{si } \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + 1 & \text{si } \lambda_2 \leq 0 \end{cases}.$$

*Démonstration.* La seule chose à faire, vu ce qu'on a dit auparavant, est de compter le nombre de couples  $(\mu_1, \mu_2)$  d'entiers tels que

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3$$

et  $\mu_1 + \mu_2 = 0$ . Cette dernière condition nous montre qu'il suffit de choisir  $\mu_1$  (ou  $\mu_2$ ) pour déterminer entièrement le couple.

Premier cas :  $\lambda_2 \geq 0$ . On voit qu'alors, les seules possibilités qui conviennent pour  $\mu_1$  sont  $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 (\geq 0)$ . De plus, chacune de ces possibilités donne un  $\mu_2$  valide car  $\mu_2 = -\mu_1 \leq 0 \leq \lambda_2$ , et  $|\lambda_3| = |-\lambda_1 - \lambda_2| \geq \lambda_1$  et donc  $\mu_2 \geq \lambda_3$ . Ainsi, il y a  $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$  couples  $(\mu_1, \mu_2)$  qui conviennent.

Deuxième cas :  $\lambda_2 \leq 0$ . On fait exactement pareil, mais pour  $\mu_2$  : les seules possibilités sont  $(0 \geq) \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3$ , et chacune d'entre elles donne un  $\mu_1$  valide (pour les mêmes raisons qu'au premier cas pour  $\mu_2$ ). Ainsi, il y a  $\lambda_2 - \lambda_3 + 1$  couples  $(\mu_1, \mu_2)$  qui conviennent.  $\square$

**Remarque :** Dans le cas de  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ , on voit qu'il s'agit d'un polynôme (et pas seulement d'un quasi-polynôme), et qu'il est défini en deux morceaux. Ce n'est pas surprenant car il y a bien deux chambres dans ce cas, et  $\Gamma = Q$ .

Passons au cas d'un groupe de type  $B_2$  et faisons la même chose pour le groupe  $\text{SO}_5(\mathbb{C})$ . De même, commençons par rappeler certaines propriétés des représentations irréductibles de ce groupe (que l'on peut de nouveau trouver dans [GW09]).

Les représentations irréductibles de  $\text{SO}_5(\mathbb{C})$  sont paramétrées par leur plus hauts poids, qui correspond à un couple d'entiers  $\lambda_1, \lambda_2$  tels que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ . La loi de branchement connue pour ce groupe nous dit que, si on considère une telle représentation et qu'on la restreint à  $\text{SO}_4(\mathbb{C})$ , elle se décompose en une somme de représentations irréductibles de  $\text{SO}_4(\mathbb{C})$ , dont les plus hauts poids sont les couples  $(\mu_1, \mu_2)$  d'entiers tels que

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq |\mu_2|,$$

et qui apparaissent avec multiplicité 1. De plus, ces représentations de  $\text{SO}_4(\mathbb{C})$  possèdent un sous-espace de poids zéro non trivial si et seulement si elles sont de caractère central trivial, ce qui se traduit par  $\mu_1 + \mu_2 \in 2\mathbb{Z}$ . Dans ce cas, ce sous-espace est de dimension 1. Pour obtenir le sous-espace de poids zéro de la représentation de  $\text{SO}_5(\mathbb{C})$  de départ, il suffit alors d'ajouter ces sous-espaces.

**Proposition 2.7.** *Soit  $V(\lambda_1, \lambda_2)$  une représentation irréductible de  $\text{SO}_5(\mathbb{C})$  de plus haut poids  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ . Alors, le sous-espace de poids zéro de  $V(\lambda_1, \lambda_2)$  est de dimension*

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + 1 & \text{si } \lambda_1 + \lambda_2 \text{ est pair} \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}{2} & \text{si } \lambda_1 + \lambda_2 \text{ est impair} \end{cases}.$$

*Démonstration.* D'après ce qui précède, on cherche à compter le nombre de couples  $(\mu_1, \mu_2)$  d'entiers tels que

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq |\mu_2|$$

et  $\mu_1 + \mu_2$  est pair.

On a donc, sans tenir compte de la parité,  $(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)$  possibilités pour  $\mu_1$ . De plus, si

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont pairs, il y a parmi ceux-là  $\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 2}{2}$  entiers  $\mu_1$  qui sont pairs. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont impairs, il y a seulement  $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$  entiers  $\mu_1$  pairs. Enfin, si exactement un élément de  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  est pair, il y a alors  $\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}$  entiers  $\mu_1$  pairs.

D'autre part,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  doivent avoir la même parité, et on doit avoir  $-\lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_2$ . Ceci nous donne :

- Si  $\lambda_2$  est pair,  $(\lambda_2 + 1)$  entiers  $\mu_2$  pairs et  $\lambda_2$  entiers  $\mu_2$  impairs.
- Si  $\lambda_2$  est impair,  $\lambda_2$  entiers  $\mu_2$  pairs et  $(\lambda_2 + 1)$  entiers  $\mu_2$  impairs.

Avec tout ceci, on peut sans problème faire le calcul du nombre de couples  $(\mu_1, \mu_2)$  qui conviennent.

**Premier cas :**  $\lambda_1 + \lambda_2$  est pair.

- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont pairs, le nombre de couples recherchés est :

$$\underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 2}{2}}_{\mu_1 \text{ pairs}} \underbrace{(\lambda_2 + 1)}_{\mu_2 \text{ pairs}} + \underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}_{\mu_1 \text{ impairs}} \underbrace{\lambda_2}_{\mu_2 \text{ impairs}} .$$

- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont impairs, ce nombre est :

$$\underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}_{\mu_1 \text{ pairs}} \underbrace{\lambda_2}_{\mu_2 \text{ pairs}} + \underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 2}{2}}_{\mu_1 \text{ impairs}} \underbrace{(\lambda_2 + 1)}_{\mu_2 \text{ impairs}} .$$

On voit que dans les deux cas, cela nous donne

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + 1.$$

**Deuxième cas :**  $\lambda_1 + \lambda_2$  est impair.

- Si  $\lambda_1$  est pair et  $\lambda_2$  est impair, le nombre de couples recherchés est :

$$\underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}}_{\mu_1 \text{ pairs}} \underbrace{\lambda_2}_{\mu_2 \text{ pairs}} + \underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}}_{\mu_1 \text{ impairs}} \underbrace{(\lambda_2 + 1)}_{\mu_2 \text{ impairs}} .$$

- Si  $\lambda_1$  est impair et  $\lambda_2$  est pair, ce nombre est :

$$\underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}}_{\mu_1 \text{ pairs}} \underbrace{(\lambda_2 + 1)}_{\mu_2 \text{ pairs}} + \underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}}_{\mu_1 \text{ impairs}} \underbrace{\lambda_2}_{\mu_2 \text{ impairs}} .$$

Cela nous donne dans les deux cas

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}{2} .$$

□

**Remarque :** Dans le cas de  $\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$ , on voit donc qu'il s'agit d'un quasi-polynôme (cela se traduit par la condition sur la parité de  $\lambda_1 + \lambda_2$ ), mais qui n'est pas défini par morceaux sur des chambres différentes. En effet, dans ce cas-là, il n'y a qu'une chambre, mais  $\Gamma$  est d'indice 2 dans  $Q$ .

### 2.4.2 Cas du groupe $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$

Finissons par un résultat similaire à ceux montrés dans la sous-partie précédente, mais concernant cette fois-ci le groupe  $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ . On ne va pas détailler sa démonstration car elle serait très longue à écrire (cinq pages dans l'article de Kumar et Prasad [KP14]) et n'apporterait pas grand chose : cela fonctionne exactement sur les mêmes principes que dans les cas précédents, sauf qu'il faut distinguer un bien plus grand nombre de cas. On donne simplement ce résultat pour montrer qu'il est possible d'obtenir l'expression de la dimension du sous-espace de poids zéro pour des groupes un peu plus "gros" que  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$  et  $\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$ , mais que cela devient tout de même déjà assez fastidieux pour des groupes comme  $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ , qui ne sont pas franchement considérés comme "ingérables"...

**Proposition 2.8.** *Soit  $V$  une représentation irréductible de  $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$  de plus haut poids  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ , et de caractère central trivial (i.e.  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ ). Alors, la dimension du sous-espace de poids zéro de  $V$  est*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)(\lambda_2 - \lambda_4 + 2) & \text{si } \lambda_2 \leq 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_1 - \lambda_3 + 2) & \text{si } \lambda_3 \geq 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda_4 - \lambda_3 - 1)(2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4 - \lambda_1 + \lambda_3 - 2) & \text{si } \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \leq 0, \lambda_1 + \lambda_4 \geq 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1 - 1)(2\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4 - \lambda_2 - 2) & \text{si } \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \leq 0, \lambda_1 + \lambda_4 \leq 0 \end{cases}.$$

*Démonstration.* Elle peut être trouvée entièrement dans [KP14]. Il s'agit simplement, comme pour  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ , de restreindre  $V$  à  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ , de la décomposer en somme de représentations irréductibles de ce groupe (en utilisant la loi de branchement pour  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ , que l'on a rappelée pour  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ ), et de regarder les sous-espaces de poids zéro de ces dernières, en utilisant le résultat de la proposition 2.6.  $\square$

**Remarque :** On remarque de nouveau, dans ce cas (type  $A_3$ ), que l'on obtient un polynôme défini par morceaux (quatre, cette fois-ci), comme pour le cas du type  $A_2$ . Là encore, ce résultat n'est pas surprenant car  $\Gamma = Q$  et il y a quatre chambres dans le cas  $A_3$ .

## Références

- [BG06] Enrico Bombieri and Walter Gubler. *Heights in Diophantine Geometry*. Cambridge University Press, 2006.
- [Bou68] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*. Hermann, Paris, 1968.
- [DH98] I. V. Dolgachev and Y. Hu. Variation of geometric invariant theory quotients. *Publication Math IHES*, 87 :5–56, 1998.
- [DN89] J.-M. Drezet and M. S. Narasimhan. Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques. *Invent. Math.*, 97 :53–94, 1989.
- [Dol03] Igor Dolgachev. *Lectures on Invariant Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory : A First Course*. Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [Ful84] William Fulton. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [GW09] R. Goodman and N. R. Wallach. *Symmetry, Representations, and Invariants*. Springer-Verlag, New-York, 2009.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, New-York, 1977.
- [Hum72] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, New-York, 1972.
- [Hus94] Dale Husemoller. *Fibre Bundles*. Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [Kos61] Bertram Kostant. Lie algebraic cohomology and the generalized Borel-Weil Theorem. *Annals of Mathematics*, 74(2) :329–387, 1961.
- [KP14] Shrawan Kumar and Dipendra Prasad. Dimension of zero weight space : an algebro-geometric approach. *Journal of Algebra*, 403 :324–344, 2014.
- [Kum08] Shrawan Kumar. Descent of line bundles to GIT quotients of flag varieties by maximal torus. *Transformation Groups*, 13(3-4) :757–771, 2008.
- [LP97] Joseph Le Potier. *Lectures on Vector Bundles*. Cambridge University Press, 1997.
- [MFK94] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique : Une introduction*. InterÉditions/CNRS Éditions, Paris, 1995.
- [Res00] Nicolas Ressayre. The GIT-equivalence for G-line bundles. *Geom. Dedicata*, 81 :295–324, 2000.
- [Sha74] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1974.

- [Tel00] C. Teleman. The quantization conjecture revisited. *Annals of Mathematics*, 152 :1–43, 2000.
- [Wol84] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1984.